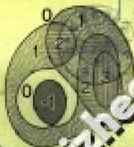
拓扑学的首要概念

线段、曲线、圆周与圆片的映射的几何学

〔美〕 [illegible] 著　蒋守方 江泽涵 译



上海科学技术出版社

拓扑学的首要概念

线段、曲线、圆周与圆片的映射的几何学

〔美〕陈锡驹　斯廷路德　著

蒋守方　江泽涵　译

上海科学技术出版社

First Concepts of Topology

The Geometry of Mappings of Segments,

Curves, Circles and Disks

W. G. Chinn, N. E. Steenrod

The Math. Assoc. of America, 1966

拓扑学的首要概念

线段、曲线、圆周与圆片的映射的几何学

〔美〕陈锡驹 斯廷路德 著

蒋守方 江泽涵 译

上海科学技术出版社出版

（上海瑞金二路 450 号）

新华书店上海发行所发行 上海商务印刷厂印刷

开本 787×1092 1/32 印张 6.5 字数 142,000

1984 年 3 月第 1 版 1984 年 3 月第 1 次印刷

印数：1—13,000

统一书号：13119·1126 定价：（科五）0.88 元

翻译说明

要学好数学，必须喜爱数学．入门的书对于启发读者的兴趣和爱好关系很大．一本好书循循善诱、引人入胜；相反，则望而生畏、令人却步．

由于种种原因，数学往往被罩上一层神秘的面纱．好奇的中学生、热心的中学老师和各条战线上广大的科教工作者都渴望了解：究竟什么是数学？它有那些主要方面？近代数学研究什么问题？有那些重要的数学思想和成就？

为了满足这些要求，我们组织选译了这套《新数学丛书》，向广大读者推荐．

和一般的通俗数学读物不同，《新数学丛书》的选题既不是介绍某些有趣的数学问题，也不是传授专门的解题技巧；而是向未必具有很深数学修养的读者系统地介绍一些与近代数学有关的数学分支中的专题．这套书选题面较广，涉及代数、几何、分析、拓扑、概率、计算机以及数学在力学、物理等方面的应用．内容虽然浅显，但却抓住了核心和基本的数学思想．

这套书还有一个特点：撰写人大多数是该领域中的著名学者，学术造诣精深，热心普及数学教育；因此能高瞻远瞩，深入浅出，生动而严肃，简明而不失全貌．

这套丛书不仅可以作为高中学生和大学低年级学生的课外读物，而且对于想了解近代数学思想和方法的科教工作者也提供了一条门径．

《新数学丛书》首创于1961年，已陆续出版近三十册．有些书早已脱销．《新数学丛书》编委会，特别是Anneli Lax教授，得知我国有意翻译这套丛书后，慷慨地赠送了全套样书．在此，我们表示衷心的感谢．

江泽涵　张恭庆

附注：《新数学丛书》的中译本，除本书外，其余各册均由北京大学出版社组译出版。

致 读 者

这本书是专业数学家编写的一套丛书中的一本. 编写这套丛书的目的是要向广大的中学生和非专学数学的外行人，把一些重要的数学概念说明得有趣且能懂.《新数学丛书》中的大多数书所讨论的课题，通常不属于中学课程表范围；各书的难易程度不同，甚至于在同一本书里，有些部分就比其他部分更需要全神贯注才能读懂. 虽然读者要懂得这丛书中大多数书，并不需要多少专门知识，但是他必须动一番脑筋.

如果读者从来只在课堂上才遇到数学，那他就应该牢记：数学书不能读得很快. 他也一定不要期望读第一遍时就能理解书的全部内容. 复杂的部分他应该不受拘束地跳过去，以后再回过头来读；一个论点经常会通过后面的话才搞清楚. 另一方面，内容十分熟悉的一些节可以读得很快.

学数学的最好办法是“做”数学；每一本书里都包含问题，其中有些可能需要很可观的思考. 劝告读者养成读书时手边备有纸和笔这一习惯，这样地读，他会越来越觉得数学有趣味.

这套书的编印是一种新的冒险. 我们愿在此申明并致谢，在准备这套书时，许多位中学师生曾慷慨协助. 编辑者欢迎读者提出意见. 请函告 Editorial Committee of the NML Series, New York University, The Courant Institute of Mathematical Sciences, 251 Mercer Street, New York, N. Y. 10012.

《新数学丛书》编辑者

致译本的读者——全书鸟瞰

本书的英文原著是美国数学联合会编的《新数学丛书》中的一本．(1966年初版，我们根据第五次印刷本翻译.)原书中附有丛书编者的一篇“致读者”，已译出附在前面，其中有几个很好的建议，值得读者特别注意．现在插入本篇，目的是引导读者主要从几何直观的侧面先鸟瞰全书；从而在读本书时能够较容易地理解，而且在读完后能对本书的全貌有较深的印象．

1．本书的目的是要说明拓扑学是怎样产生的，要阐述它的少数几个原理，并且要给出它的一些较简单的应用(本书引言的第一句话)．本书中的阐述包括直观的明显性和数学证明的严密性这两个相辅相成的侧面．为着达到目的，本书所采取的办法是围绕着分析学的两个存在定理来阐述这些原理(引言第三段第一句话)．这两个存在定理可以统一地认为是解方程的存在定理．可以更具体地说明如下：令 f 是以 n 维欧氏空间 R^n 中的一个区域 B^n 为定义域并以 R^n 为值域的一个单值连续函数，或简称为一个映射，记为 $f:x\mapsto y$ 或 $y=f(x)$．在第一编与第二编(除去第37节外)中，n 分别为1及2．第一编§1中的定理与第二编§18中的定理18.1就是所说的分析学的两个存在定理，在本书中分别叫作第一编与第二编的主要定理．它们断言：当 y 是值域中的何种点时，定义域中至少有一点 x，使得方程 $y=f(x)$ 成立．通常已习惯地把数学分为几何、代数和分析三个分支，并且认为解方程

是代数问题，现在又知道第一编§1中的定理是分析学中的基本定理，而且本书将告诉我们这两个存在定理在作为几何的拓扑学中的重要地位及其应用；可知在全部数学的发展史中，求解方程确实是一个很重要的侧面，起很重要的作用。

2．第一编的主要定理中的映射f的定义域B^1是一个闭线段$[a, b]$，而值域是直线R^1，即$f:[a, b]\to R^1, x\mapsto y=f(x)$．把$[a, b]$看作是在$(x, y)$平面的$x$轴上，并且把$R^1$看作是这平面的$y$轴，然后可在这平面作函数$f$的图形．直观地把$f$的连续性等同于$f$的图形的连续性，使读者有一个直观的理解，是可取的，并且一些分析学的速成教程中就是这么作的．后来觉察到f的连续性概念应进一步加以剖析，如同本书§1的末段所指出的，分析学的大学教程(如同现时综合性大学理科一年级的分析学教程)才改用ε邻域与δ邻域的方式来定义连续性．学过这第二种教程的读者，在掌握了R^n的子集中的邻域与R^n中的邻域这二者之间的关系(见§3中的第一个定义)后，对于本书§§2—7不会有很多困难，除去可能常有目的性不明之感而外。

前七节是准备工作，其关键是用拓扑性质来替代ε邻域与δ邻域．目的性的详细而具体的说明在§8，§8中的第一个定义之前的短短的篇幅总结式地给出了§1中的定理的完全证明，并且指出如何在很大程度上推广了这定理．然后用§8中的第一个定义规定了什么是拓扑性质．根据这个定义，特别可知§4中的定理4.5就是说函数或映射f的连续性是拓扑性质．接着在§8中定理8.1之后，回答了拓扑学是什么这一问题。

此外，第一编中有函数或映射的许多例子与习题，以及§§9—12中的四个应用。

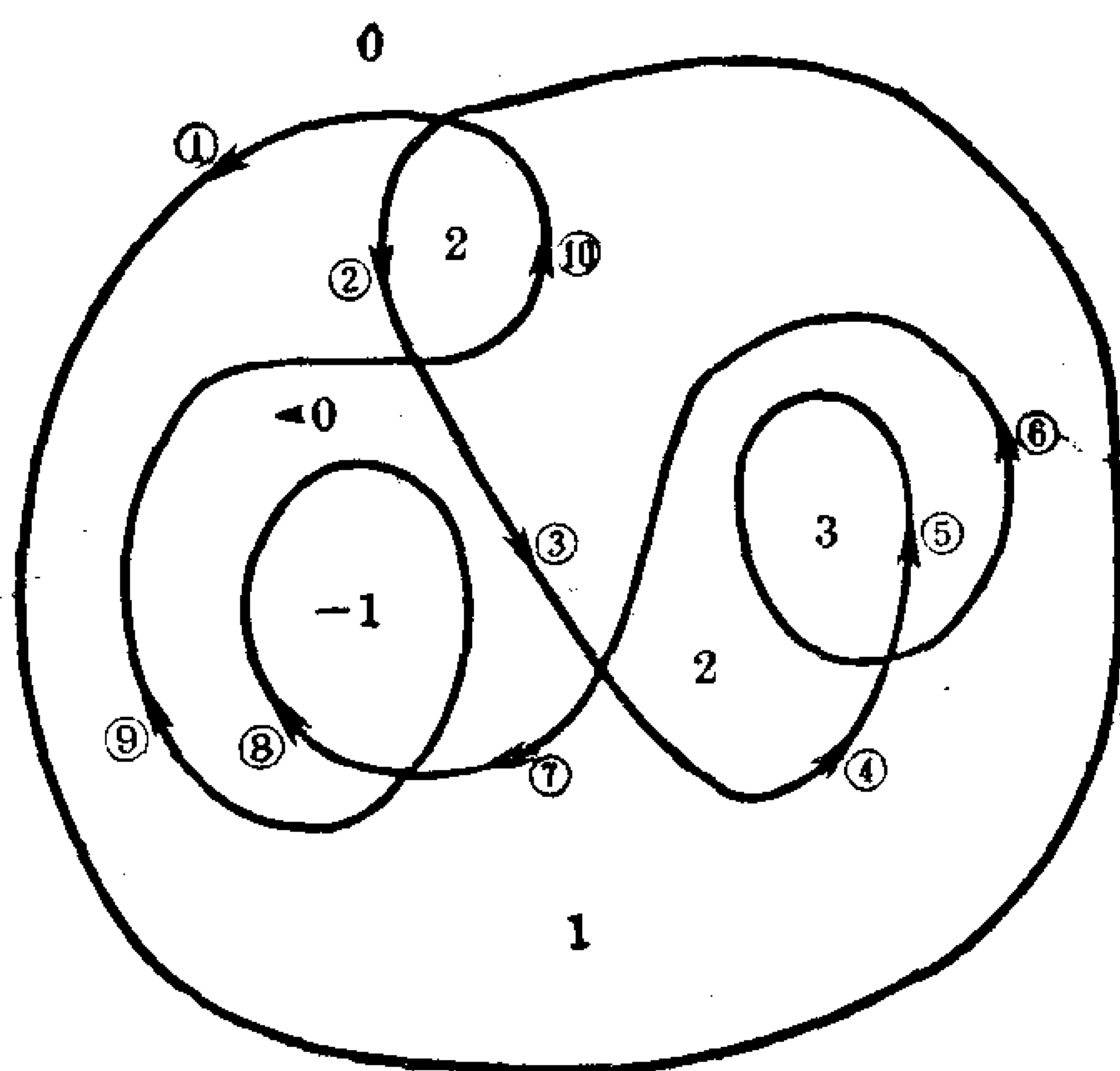
3. 第二编中的主要定理是 § 18 中的定理 18.1, 其中的单值的连续函数或映射是把 B^2 即圆片 D(请根据索引查定义)映到平面的 $f: D \to P(=R^2)$, $x \mapsto y=f(x)$. 因为 D 与 P 都是二维的, 故方程 $y=f(x)$ 代表的是联立的一对方程:

$$y_1=f_1(x_1, x_2), \ y_2=f_2(x_1, x_2),$$

这就跟第一编中的主要定理求解一个变数 x 的方程 $y=f(x)$ 完全不同了. 在第一编中只要用函数 $y=f(x)$ 在平面中的图形就可以直观地说明那里的主要定理的直观意义. 现在第二编中的联立方程 $y=f(x)$ 的图形是 R^4 中的一个曲面, 人们难以直观地描绘它, 无法用它来解这联立方程 (见 § 13 中的前四段). 替代联立方程的图形的, 是 § 18 中定理 18.1 的叙述中所提的另一个很直观的概念: 曲线 $f|C$ 在点 y 处的围绕数 $W(f|C, y)$. 读者在读完 § 13 中前四段后, 可试着立即读 § 15, 接着读 § 17, 以获得围绕数与主要定理 18.1 的直观解释.

为着直观地解释围绕数, 我们把原书的五种颜色的封面图改画如后. 这图的 $f|C$ 不是简单闭曲线, 而是具有五个四枝的(即十字路口式的)交叉点的闭曲线. 这些交叉点把 $f|C$ 分成具有循环顺序的从 ① 到 ⑩ 十条简单弧或圈, $P-f|C$ 共分成七个连通的开区域. 读者可根据直观理解先来检验: 闭曲线 $f|C$ 在同一个区域的各点处的围绕数是同一个整数, 确是如同图中所标明的 $-1, 0, 1, 2, 3$. 标明 0 的和 2 的各有两个区域.

本书中这两个主要定理的叙述都说明几何直观是发现与证明定理的一个重要源泉; 也说明分析学自然会有, 并且也应有速成的和大学的两种教程. 但直观的定义既不能作为数学定义, 并且, 如同第二编 § 19 再一次所强调的, 直观解释也不

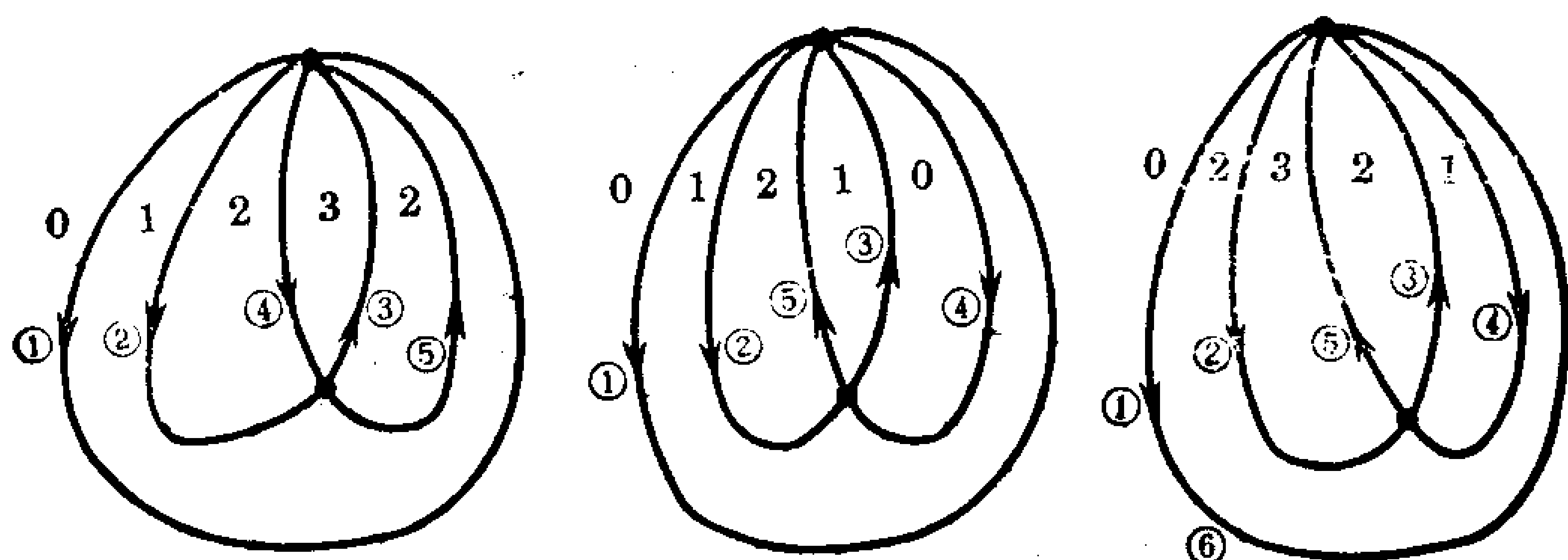


能作为数学证明. 所以第二编中用 § 16, § 20 到 § 22 四节的篇幅作为准备工作, 来建立围绕数定义, 用 § § 24—25 两节来讨论围绕数的性质, 然后在 § 26 中获得主要定理 18.1 的完全证明.

§ § 27—36 给出这主要定理的六个应用.

4. 全书的最后一节, § 37, 高维情形的一瞥, 只是谈到书中的两个主要定理的一些高维的推广. 作者简短地介绍所谓包裹数与环绕数, 并提到一般的同调论中的相交数与环绕数.

为着增加读者的兴趣与理解, 我们现在不揣浅陋, 作两点补充. 首先, 作者为浅显起见, 第二编中的闭曲线 $f|C$ 的图, 都限制为至多具有四枝的交叉点. 其实, 它可以有任意偶数枝的交叉点或更复杂的情形. 我们举三个不同的闭曲线为例; 它们都只有一个四枝的交叉点与一个六枝的交叉点, 都把平面分成五个区域. 请读者检验每一条闭曲线的在每一区域的点处的围绕数, 确是如同图中所标明的.



其次，读者可能早已知道欧氏空间的特征，是其中两点之间的距离，而距离并非拓扑性质；读者会问书中为什么讨论的是 R^n 与它的子集 B^n 呢？答案仍是引言的第一段所说的本书的目的，与第三段所说的达到这目的的方式．读者如果想进一步澄清这一问题，可从任一本拓扑学教程中查出拓扑空间的定义，理解到 R^n 是拓扑空间的最重要的特例，然后把§8的两个定义与定理8.1中的欧氏空间都用拓扑空间替代，就可以粗知最一般的拓扑学是什么．

江泽涵

1981年12月

译者声明，此译本中用方括号标出的字句是译者所加的话．译者感谢上海科学技术出版社编辑曾对译文提出宝贵意见，并感谢方涛同志曾检验“习题解答”．

目　录

引　言

我们写这本书的目的是要说明拓扑学是怎样产生的，要阐述它的少数几个原理，并且要给出它的一些较简单的应用.

约在五十年以前，人们才承认拓扑学是数学的一个独立分支，而它迅速成长，主要还是最近这卅年来的事. 在数学较新的诸分支中，它是最生气勃勃的，并且在大多数较老的分支中引起强烈的反应. 它是为着适应分析学（包含微积分和微分方程的那部分数学）的需要而肇始的. 但它却不是分析学的一个分支. 它是一种几何学. 但它又不象射影几何或微分几何那样位于几何学的高层，而是位于几何学的底层或基层，是所有几何学的基石. 拓扑学的一个惊人的特点是：它的诸概念已经渗透到数学的差不多所有领域. 在大多数的这些应用中，对于证明被叫做*存在*定理的某些基本命题方面，拓扑学提供主要工具与概念.

本书所介绍的拓扑学的原理将围绕着分析学的两个存在定理. 第一个定理在第一编里介绍. 它是微积分中一个基本定理；早在拓扑学被认为是一门独立学科以前很久，人们就知道它. 我们在证明这一定理时，将展现出拓扑学的基本概念. 这同时将说明拓扑学是如何产生的，以及它为什么有用处. 在第二编里介绍的第二个主要定理，是把第一个定理从一维空间推广到二维空间. 不同于第一个定理，第二个定理的提出以及叙述，就需要引用一个拓扑概念. 第二个定理的证明展示出拓扑学的特征——数值的精确与定性的几何概括这二者

的结合．两个定理都有许多应用．我们将介绍那些具有最强烈拓扑色彩的应用．

在 Karl Weierstrass 十九世纪六十年代的工作中能找到拓扑学的起源．他分析了函数极限这个概念（与微积分中所用的一样）．在这项工作中，他重建实数系，并且揭露出其中某些现在被叫做“拓扑的”性质．后来是 George Cantor 大胆地发展的点集理论（1874—1895）；这是拓扑学终于能自立门户的基础．在十九世纪九十年代，Henri Poincaré 研究高维积分学理论的出色的工作，开创了拓扑学的第二个方面，叫做组合拓扑学或代数拓扑学．前一个方面，叫做集合论拓扑学或一般拓扑学，它的坚实基础是由 F. Hausdorff 等人在 1900—1910 这一时期内奠定的．L. E. J. Brouwer 在维数概念的研究（1908—1912）中，第一次成功地建立了组合拓扑与集合论拓扑这两方面之间的结合．在 1915—1930 这一时期内，J. W. Alexander, P. L. Alexandrov, S. Lefschetz 和其他一些人，他们的工作都促使拓扑学的这个统一起来了的理论，在牢固的基础上不断发展．一直到 1930 年，拓扑学都叫做位置分析学（analysis situs）．Lefschetz 在 1930 年首先用拓扑学（topology）这个名称作为他的书名，尔后这个名称得到通用．

从 1930 年起始，拓扑学以加速的步伐成长着．为了强调这一点，我们提一下拓扑学在几个方面的成就．通过由 M. Morse（普林斯顿，高等研究所）发展起来的临界点理论，拓扑学侵入了变分法．通过 H. Whitney（普林斯顿，高等研究所）的关于纤维丛的工作，G. de Rham (Lausanne) 关于微分形式的工作，和 H. Hopf(Zürich) 关于李群的工作，拓扑学使微分几何恢复青春．通过代数学中新基础的发展和叫做同调代数这一个新分支的出现，拓扑学促使现代代数学中出现

了一次小的革命.这个工作大部分是由S. Eilenburg(哥伦比亚大学)和S. MacLane(芝加哥大学)做的.拓扑学通过层(sheaves)和上同调的理论,赋予代数几何学以富有希望的新生,并且通过J. Leray(巴黎)和M. Atiyah(牛津)的工作,拓扑学在偏微分方程中得到了重要的应用.

数学以外的一些科学也需要拓扑学;它们所以如此,因为它们都需要某些数学分支,从而通过这些相关的分支需要拓扑学.例如,拓扑学在微分几何中所引起的变化,产生了相对论中的拓扑思想.拓扑已成为数学的一门基本科目;事实上,它是许多领域中所必需的,是统一差不多所有数学的力量.

不搞数学的人常常会问拓扑学者:"什么是拓扑学?""它有什么用?"如果问的不是拓扑学而是三角学,那就能回答说,三角学讨论角的求定,是用来解决测量、航海和天文等问题的,这样的回答能使问者满意.但现在问的是拓扑学,拓扑学者无从作出这样简明的回答,处于不利的地位.例如,他只能说,拓扑学是许多高等数学领域内一种有用的几何思想.这是正确的;但不会使问者满意,因为没有指出拓扑学的特点.拓扑学者然后只得拿出纸、剪刀和胶水,作一条麦比乌斯(Möbius)带,并沿着中心线剪开;或者,他能拿出三个橡皮圈,表演给你看:如何把它们一个套一个地连起来.如果他还有精力,他还能表演怎样不脱去上衣就能脱去穿在里面的背心.这些都只是客厅里表演的戏法,每一个戏法都根据于一种严肃的、需要至少几个小时才能说明白的数学概念.表演这些戏法而没有适当的说明,那只是相当于替拓扑学画了一张具有讽刺意味的漫画.

要鉴赏拓扑学,必须采取数学家的观点和仔细探究它的一些成功的应用.大多数应用的共同特点出现在一个*存在定*

理的证明中．一个存在定理是这样一个定理，它断言．某一大类问题中的每一个，有某种特殊性质的一个解．一门学科中的存在定理，通常是这门学科的基本结构定理 我们主要目的之一，是阐明拓扑学在证明存在定理时的有效性和灵活性。

我们在第一编里将要证明的存在定理，是回答下面的问题：什么时候能解出形如 $f(x)=y$ 的一个方程？即，设 y 已知，什么时候能求出这方程的解 x？这里 $f(x)$ 表示定义在实数 x 的某个区间 $[a, b]$（例如 $[2, 4]$）上的一个函数或公式（例如 $x^3-\sqrt{1+x^2}$），而 y 表示一个实数$\left(\text{例如}\dfrac{33}{2}\right)$．问题是：是否存在着在区间 $[a, b]$ 中的一个数 x，使 $f(x)=y$？（用例子的公式来说，问题变为：在 2 与 4 之间是否有一个 x 值，使 $x^3-\sqrt{1+x^2}=\dfrac{33}{2}$？）

我们强调指出，我们并不是要对于特殊的例，寻找求解 x 的方法．我们是要寻找能应用于许多不同问题中的每一个问题的一种广泛的判断准则，来决定是否存在一个解．一旦这个准则保证某一个特殊问题有解，我们就能进而追踪它的解，而确信不会落空。

主要定理（第一节中叙述的）所给出的判别准则，需要函数的连续性概念（在第 3 节中定义）．定理的证明（在 2—8 节中给出）是根据区间 $[a, b]$ 的两个拓扑性质，叫做紧致性与连通性．因为这些概念是现代数学的基础，我们将对它们作详尽的说明。

第二编的主要定理，是回答下述问题的一个存在定理：一对联立方程 $f(x, y)=a$ 与 $g(x, y)=b$ 在什么时候能有用已

知数 a, b 表出的解 (x, y)? 这类问题的一个熟悉例子是一组联立线性方程

$$x-2y=3 \quad 与 \quad 3x+y=5;$$

这很容易用消去法求出它们的解. 同类型的一个较难的问题是:求下面两个联立方程

$$\frac{y\log x}{1+x^2}=-\frac{1}{4} \quad 与 \quad x+2y^3=10$$

的解 (x, y). 特别是,是否有 x 在 $\frac{1}{2}$ 与 1 之间, 而 y 在 -1 与 2 之间的一组解? 正如前面一样, 我们并不是寻找求解方法的一览表,而是要寻找一种判断是否有解的准则.

第二个主要定理(在第 18 节中叙述的)所给出的判别准则, 需要下述的概念: 一平面曲线围绕该平面上一个点的圈数. 证明也广泛地运用跟紧致性、连通性以及连续性(在第一编中建立的)有关的工具.

主要定理的应用,是关于多项式的零点、映射的不动点以及向量场的奇点等的存在定理.

作为引言的结束, 我们来对各种存在定理作几句一般性的说明. 存在定理的重要性,数学家是会立刻承认的. 学生们,开始时也许有些怀疑. 原因是: 用来证明存在性的方法,不同于学生必须学习的用来求解的技巧, 这二者之间有一个相当的鸿沟. 因为存在性的证明,必须适用于所有的、包括无论怎样困难的情形, 所以这种证明的方法, 应用于特殊情形时,就显得复杂与烦琐了. 学生所面对的大部分情形,都相对地简单,所以适宜于用比较简单的方法.

例如求多项式零点这个问题. 学生首先遇到的方程, 通常是低次的、整系数的以及能由观察而分解因式的. 然后,他

遇到稍难一些的求整数根的方程，学到从常数项的因子来求解．然后，他要学习一种更复杂的方法，来找有理根．最后，他也许遇到罕见的、几乎无从着手的方程，他要学习 Horner 的逐步逼近法．他思想中满是这些复杂的技巧，早已忘记他面对的这个存在或不存在解的一般问题．如果提醒他的话，他还会立刻说，这个问题是形而上学的问题．

如果我们回想一下，在只用直尺(不刻度的)与圆规的条件下，求三等分一个角与化圆为方这两个有名的问题的历史，我们就会懂得：存在不存在的问题，并不是一个形而上学的问题．自从欧几里得的时候起，数学家们与其他的一些人，都想过这些问题，设计出来一个又一个的精巧的方案．他们之所以如此，就是因为他们都默认解是存在的，目的是要把解找出来．这样消耗掉的时间与人力非常巨大．直到十九世纪后期，才有人终于考虑到有可能不存在解．尔后不久，不存在的证明一个一个的出现．一旦明白地揭露出存在问题是首要问题，很快就得到解答．在现代研究中，首先出现的是存在问题；要使我们的理论有可靠的基础，对存在问题的回答，是绝对关键的．

第 一 编

一维时的存在定理

1. 第一个存在定理

这一节专用来提出第一编的主要存在定理.在第 2—7 节中给出它的证明，第 8 节中进行总结. 在本节中从考察一些特例着手，然后引出这定理的陈述. 要记住，我们的问题是要提出一个判别准则，使能在许多情形下运用它来断定：能不能把形如 $f(x)=y$ 的方程解出 x 来. 为着要看出如何提出判别准则，我们先考察一些我们已经知道如何求解的方程.

先看 x 的值在 -1 与 $+2$ 之间由公式 x^2+1 定义的函数 $f(x)$. （公式对于 x 值在区间 -1 到 2 之外时有意义，不过我们不考虑这一事实.）图 1.1 表示这个函数的图形. 方程 $y=x^2+1$ 定义一条抛物线，而我们的图形是介于两条铅垂线 $x=-1$ 与 $x=2$ 之间的那段抛物线.

首先注意到曲线在 $x=0$, $y=1$ 处有一个最低点. 再说得准确些：对于所有在 -1 与 2 之间的 x, x^2+1 大于或等于 1，而在 $x=0$ 处取极小值 1. 如果要找当 x 在 -1 与 2 之间时，曲线的最高点，那就要问"在 -1 与 2 之间"的这一区间包含不包含 $x=2$ 这端点. 如果包含这端点，那么最高点就在 $x=2$ 与 $y=5$ 处. 如果不包含，那么曲线就没有最高点；因为不论我们在曲线上取哪一点，它的横标总比 2 小，在横标更接近于 2 的点处曲线上有更高的点. 为着避免这样的情况，我们

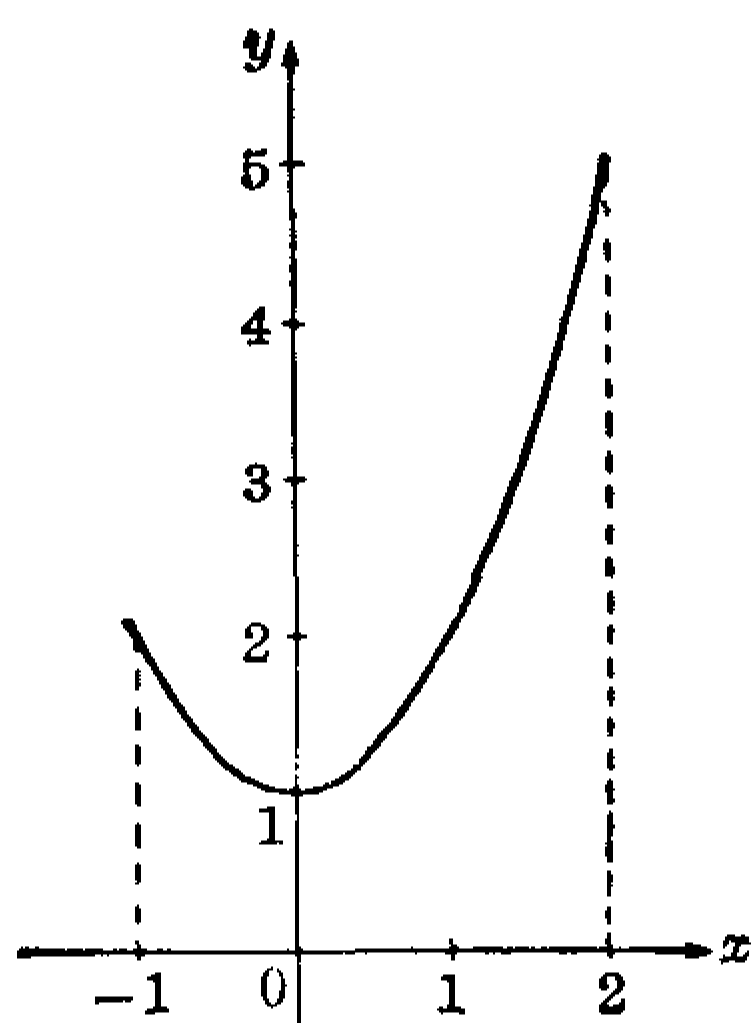


图 1.1

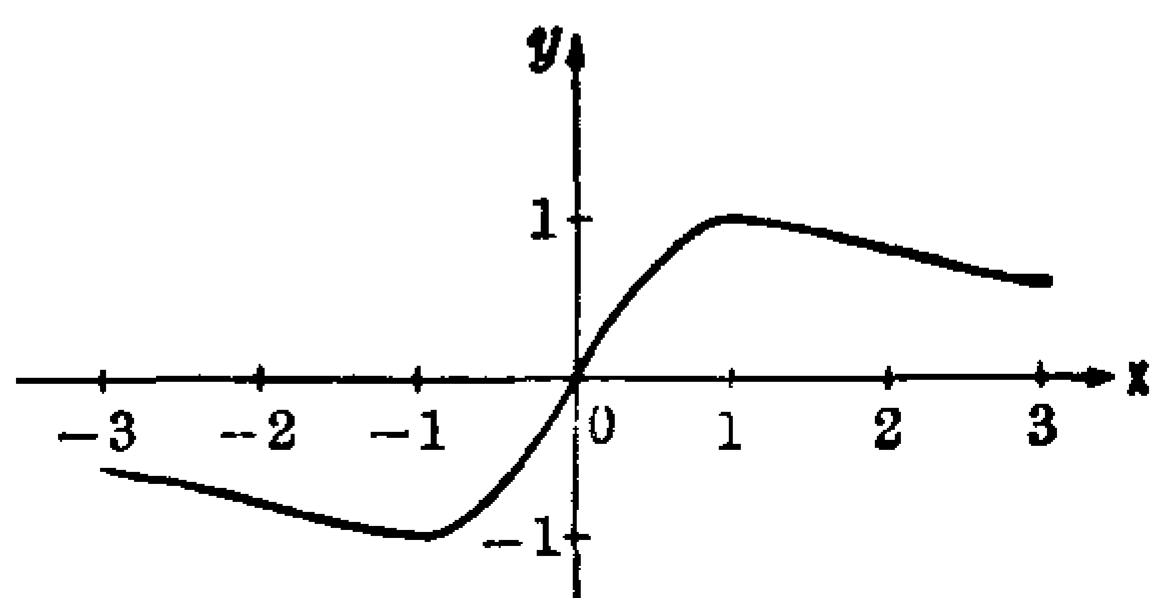


图 1.2

应该使区间包含端点 −1 与 2. 于是，对于 $-1\leqslant x\leqslant 2$ 的所有 x 值，x^2+1 比 5 小或等于 5，而函数在 $x=2$ 时有极大值 5.

现在考虑解方程 $x^2+1=y$ 这个问题；设 y 值已经给定，求满足这方程的在区间 −1 与 2 之间的相应 x 值. 若 y 值超过极大值 5，当然没有解. 在 y 比极小值 1 小的情况也一样. 然而，若 y 在 1 与 5 之间，就有解. 这只要在 x 轴的上方作高等于 y 值的水平线就能从图形上看出来. 若所作的水平线太高或太低，它就不会与曲线相交. 当高在 2 与 5 之间时，它与曲线相交一次；而在 1 与 2 之间时，它与曲线就相交两次.（用 y 的式子来表示 x 时，一个式子是 $x=\sqrt{y-1}$.）

作为第二个例子，令 $f(x)$ 由公式

$$\frac{2x}{x^2+1} \quad 对于 \quad -3\leqslant x\leqslant 3 \text{ 的所有 } x \text{ 值}$$

定义. 它的图形见图 1.2. 从方程

$$y=\frac{2x}{x^2+1}$$

不难看出：一个正 x 值给出一个正 y 值，而一个负 x 值给出一

个负 y 值. 还有，改变 x 值的符号只改变 y 值的符号；因此，曲线关于原点对称. 曲线的最高点在 $x=1$ 时出现，这时 $y=1$. 要证明确是如此，我们对于 $1-f(x)$ 这个差作一点儿代数替换：

$$1-f(x)=1-\frac{2x}{x^2+1}=\frac{x^2+1-2x}{x^2+1}=\frac{(x-1)^2}{x^2+1}.$$

因为最后的式子永远不能是负值，从而 $1-f(x)\geqslant 0$，于是 $f(x)\leqslant 1$. 由于对称性，曲线的最低点在 $x=-1$ 与 $y=-1$ 处. 因而，若 $y>1$ 或 $y<-1$，则方程 $f(x)=y$ 显然无解；但是对于 $-1\leqslant y\leqslant 1$ 的每一个 y 值，方程能解出来. (方程的两端同乘以 x^2+1，再从所得的二次式解出 $x=(1+\sqrt{1-y^2})/y$.)

人们会从上面讨论的两个例子进行推广，并且猜测：若任一函数 $f(x)$ 对于区间 $a\leqslant x\leqslant b$ 的每一个 x 值有定义，则 $f(x)$ 有一极大值 M，一极小值 m，并且对于区间 $m\leqslant y\leqslant M$ 的每一个 y 值，方程 $f(x)=y$ 有一解. 让我们多作几个函数的图形来检验这个猜测；这里要记住，我们能用图形来定义函数.

若函数 $f(x)$ 的图形如图 1.3 所示，是光滑曲线，猜测看来是对的. 当 y 在 m 与 M 之间时，高为 y 的水平线必与曲线相交. 即使曲线如图 1.4 所示，有些拐角，猜测仍然正确. 但是，若曲线如图 1.5 所示，有一处断裂，猜测就错了，因为通过

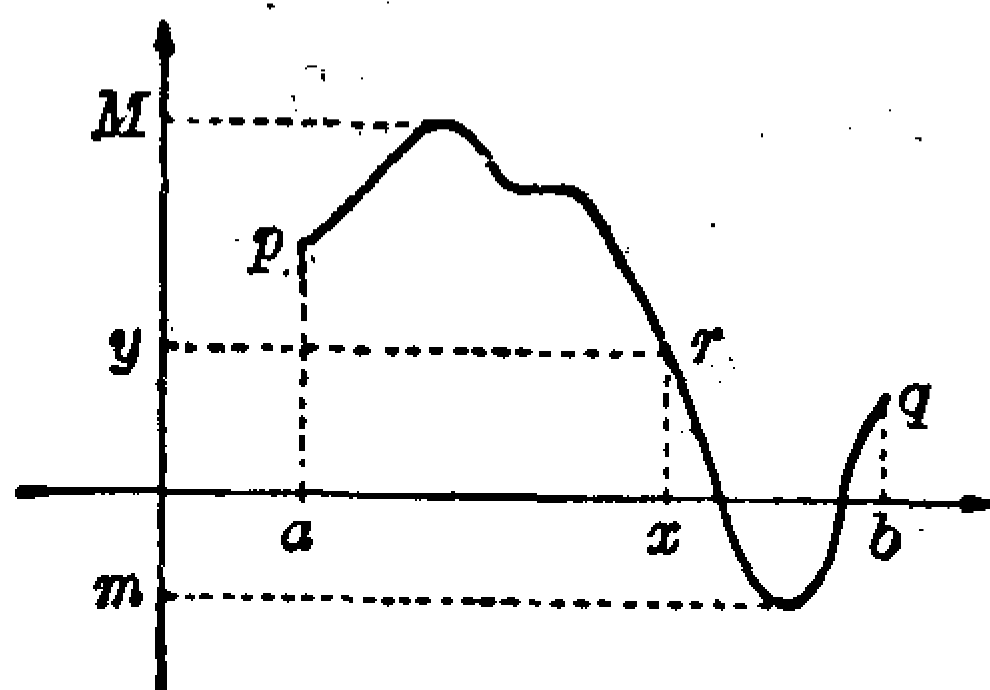


图 1.3

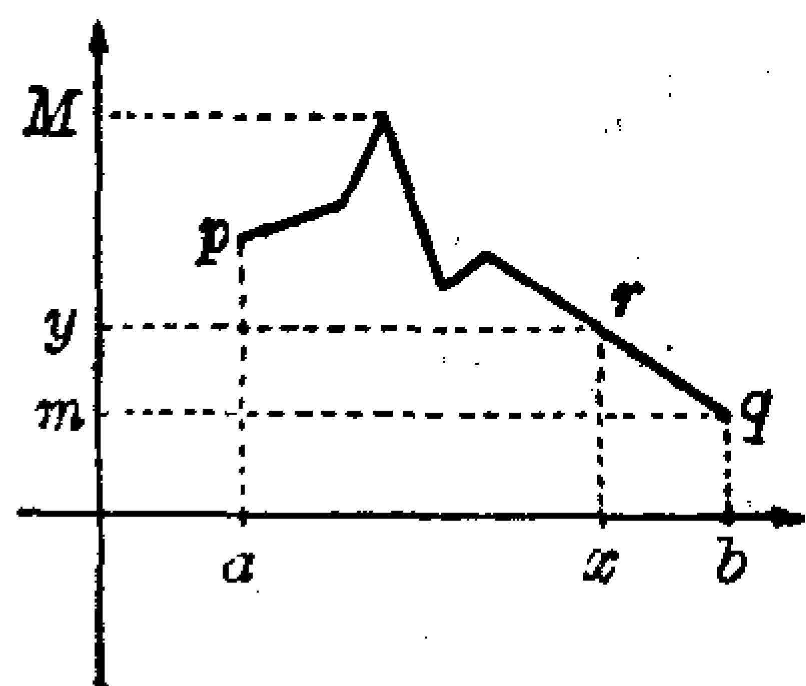


图 1.4

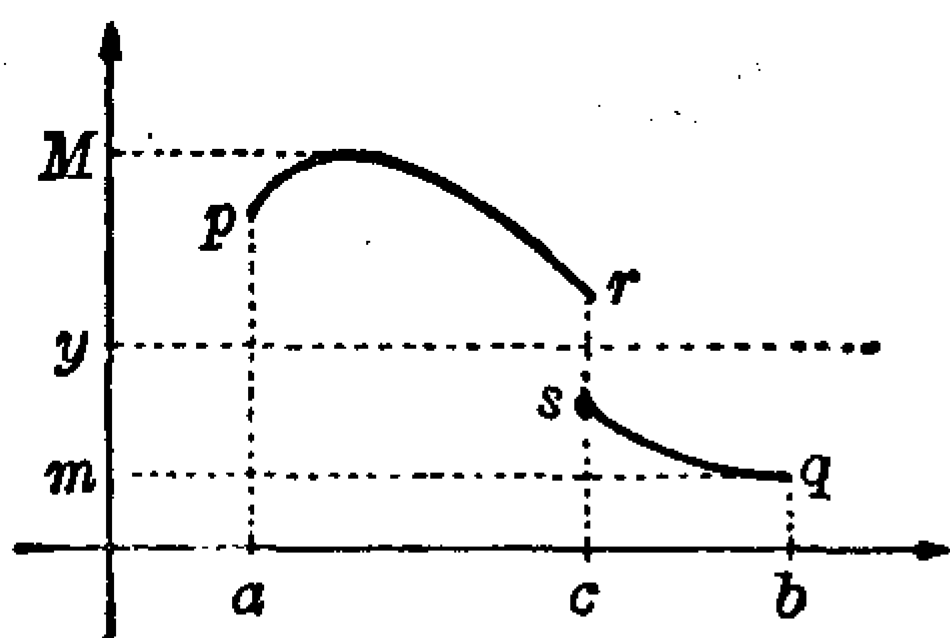


图 1.5

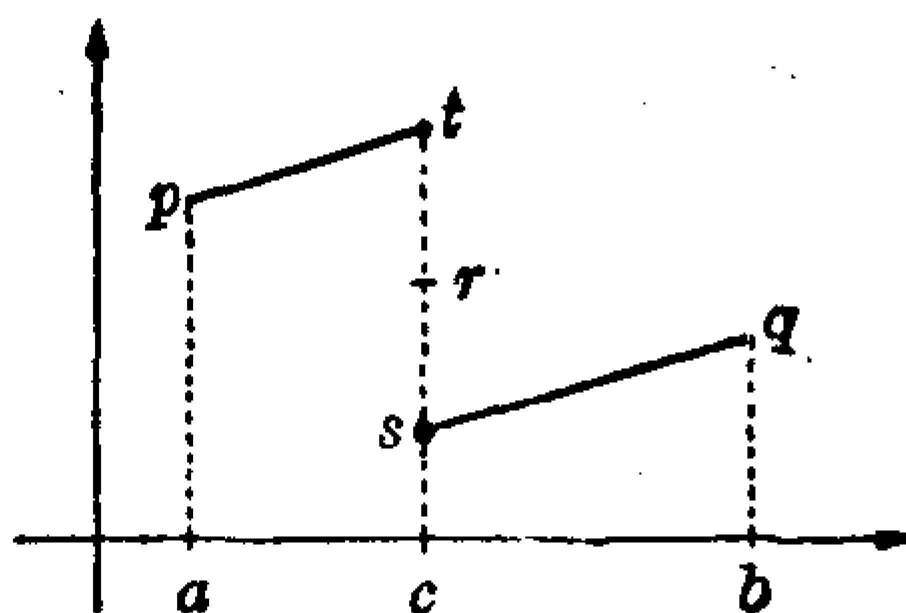


图 1.6

断裂处的水平线不与图形相交．图形有断裂处的这种函数，在数学中是很自然的．它们叫做不连续函数．一个不连续函数的图形甚至于可以没有最高点也没有最低点，例如图 1.6 所示的图形，它在 $x=c$ 处断裂，它的点 $(c, f(c))$ 是在 r 处．

现在我们已经作完准备，可以叙述第一个主要定理．

定理 若对于某闭区间 $[a, b]$ 的所有实数 x，函数 $f(x)$ 有定义，取实数值，并且连续，则函数有极小值 m 与极大值 M，并且对于闭区间 $[m, M]$ 中的每个 y 值，方程 $f(x)=y$ 在区间 $[a, b]$ 中至少有一个解 x．

定理有时简述如下：若实值函数 $f(x)$ 在区间 $a \leqslant x \leqslant b$ 中有定义且连续，则该函数有一极小值，一极大值，并取得其间的每一个值．

"闭区间"指的是包含端点 a, b 的区间，就是说，对于 x 值的限制是 $a \leqslant x \leqslant b$．"开区间"不包含端点．用 $[a, b]$ 表示闭区间，用 (a, b) 表示开区间．"半开区间"包含一个端点但不包含另一个，如 $(a, b]$ 指的是 $a < x \leqslant b$，而 $[a, b)$ 指的是 $a \leqslant x < b$．

已知一函数 $f(x)$ 连续并给定一个特定值 y，在这情形下，这定理怎样帮助我们决定能不能解出 $f(x)=y$ 呢？若我

们能确知 $f(x)$ 的极小值 m 与极大值 M，只要问：是否 $m\leqslant y\leqslant M$? m 与 M 在许多情况下不易找出．但是，算出函数的一些值通常还是容易的．若对于某个 x 值 c，得 $f(c)<y$，而对于另一个值 d，得 $y<f(d)$，则定理断言在 $[c, d]$（或 $[d, c]$ 若 $d<c$）中有一个 x 值使 $f(x)=y$．例如，若 $f(x)$ 是 $x^3-\sqrt{1+4x}$，则 $f(0)=-1$，而 $f(2)=5$．所以 $x^3-\sqrt{1+4x}=2$ 在区间 $[0, 2]$ 中有一个解．

必须着重指出：这个定理的重要在于它的普遍性．在大量的千变万化的情况下，它告诉我们一个永远可靠的求解的方法．象 x^2+1 这样不计其数的特例，就用不着这个定理，因为我们要找的可以很容易找到．应用于复杂的函数，定理就显出它的威力了．但更重要的，它是连续函数的一般理论中的第一个定理．

还必须着重指出：这定理的目前提法不够完全．f 的连续性的确切意义没有定义；我们只给出基于几何图形的一个直觉描述——f 的图形是一条没有断裂的曲线——但这仅是用一个无定义的术语来替代另一个．下两节要引导我们来得到连续性的确切定义．

习　题

1．在区间 $0\leqslant x\leqslant 3$ 中求出 $f(x)=4+2x-x^2$ 的极小值与极大值．对于哪些 y 值，区间中无对应的 x 值？对于哪些 y 值，区间中只有一个 x 值？区间中有两个 x 值？

2．函数 $f(x)=x^3-5$ 在 $x=1$ 时取值 -4，在 $x=2$ 时取值 3；它在区间 $1\leqslant x\leqslant 2$ 中连续．定理怎样蕴涵在 1 与 2 之间 $\sqrt[3]{5}$ 有一个值？

3．在哪两个正整数 x 之间使多项式 x^2-2x-4 为零？

4．在区间 $0\leqslant x\leqslant 5$ 中，求 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 的极小值与极大值．

5. 在区间 $0\leqslant x\leqslant 7$ 中，求 $f(x)=3$ 的极小值与极大值。

6. 在区间 $0\leqslant x<5$ 中，求 $f(x)=x$ 的极小值与极大值。

2. 集合与函数

本书从头到尾首要关心的将是几何图形。这些图形就是欧几里得直线的、平面的、或空间的子集。为方便起见，我们假设已在直线、平面、或空间中引进了笛卡儿坐标，每个点 x 用它的坐标表出。一个点的坐标形成一组有顺序的 n 个实数 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，简称为实数的一个 n 组。于是在平面的情形 n 是 2，在三维空间，n 是 3，而在直线，$n=1$。用 R 表示全体实数，用 R^n 表示实数的全体 n 组。我们将几何地看待这些；于是 $R=R^1$ 是数直线(有坐标系的直线)，R^2 表示一个有坐标系的平面，而 R^3 表示一个有坐标系的三维空间。

从引言与前一节中所提出的计划，已经可以知道我们的重点将是函数的研究。本书中"函数"这名词的含义，比在较初等的课程(包括微积分在内)中通常含义要广泛一些。在本节中，我们将指出这种广泛性的范围。本书将采用集合论中的通用语言及符号。我们并不采用许多术语；但是采用了的就经常用。现在就来给出将来所需要的术语与符号。

若 X 是一个集合，则 $x\in X$ 表示 x 是这集合的一个元素。若 A 与 X 都是集合，则 $A\subset X$ (读作：A 被包含在 X 中)，表示 A 的每个元素是 X 的一个元素，而 A 叫做 X 的一个子集。大多数情况下，我们要涉及的将是直线的，或平面的，或空间的子集(即 $X\subset R^n$，对于某个正整数 n)，所以总是把 X 的元素叫做点。若 $A\subset X$ 而且 $B\subset X$，则它们的交集 $A\cap B$ 由 A 与 B 的公共点的全体组成，而它们的并集 $A\cup B$

由 A 的点、B 的点、以及 A 与 B 的公共点的全体组成. 空集用 $\emptyset$ 表示，它是任何集合的子集. 于是 $A\cap B=\emptyset$ 是说 A 与 B 没有公共点. 若 $A\subset X$，则 $X-A$ 表示在 X 中、但不在 A 中的点的全体，叫做 A 在 X 中的补集.

在高等数学里，函数这名词的意义十分广泛；事实上，它是整个数学的一个基本概念. 下面的定义，就与函数的这种最广泛的用法相一致.

定义 一个函数 f 由三件东西组成：一个集合 X，叫做 f 的定义域；一个集合 Y，叫做 f 的值域；与一个规律，它对于 X 的每一个元素，指定 Y 的一个相对应的元素. 符号 $f: X\rightarrow Y$ 读作：f 是一个函数，它的定义域为 X 而值域为 Y；或简单些，f 是从 X 到 Y 的一个函数. 我们把"f 对于每一个元素 $x\in X$，指定一个对应的元素 $y\in Y$"这句话缩写成"$y=fx$, $\forall x\in X$."(我们把 $f(x)$ 中括号省略掉，以符合通行的用法). 对于 $x\in X$，全体 fx 值的集合正好是 Y 时，我们说 f 是从 X 到 Y 上 (onto) 的一个函数，或从 X 到 Y 的一个满函数[1].

---

1) 我们把点 $y=fx$ 叫做点 x 的 f 象或象. 很自然地，我们要用 fX 表示 X 中全体点 x 的象 fx 所形成的集合，叫做 X 的 f 象或象. 这句话可以用集合论里的一个十分方便的符号：$fX=\{fx|\forall x\in X\}$ 来表示. 这符号中花括号 $\{\ \}$ 总是用来表示一个集合，括号内竖杆的左边说明这集合的元素是 fx，右边说明这些元素是对于 X 的每一个元素 x 得到的.
根据定义中对 f 的要求，下列事实是明显的. 给定一点 x，恰只有一个象点 $y=fx\in Y$. 在这意义下，f 也叫做单值函数. 因此我们的定义只限于单值函数. 而给定一点 $y\in Y$，并未要求存在点 $x\in X$ 或只有一点 $x\in X$，使得 $fx=y$. 满足 $fx=y\in Y$ 的点 x 叫做 y 的原象或反象.
当 $Y=fx$，f 就叫做从 X 到 Y 的满函数. 当 Y 的每一点 y，它的原象只有一个点，f 就叫做单原函数. 单值的、单原的、而且满的函数就叫做从 X 到 Y 的一对一的函数，或 X 与 Y 间的一对一的函数.——译者注

例如在微积分中，一个函数通常是指实变数的实值函数；即它的定义域与值域都是 R 的子集．此外，还经常假设函数是由象 $\sqrt{1-x}$ 这样的某一公式给出来的．这种情况下，照例既不说明定义域也不说明值域．默认定义域 X 是使公式有意义的那些实数的集合(例如 $\sqrt{1-x}$ 对于所有的 $x\leqslant 1$ 包含负数，都有定义)．作为值域 Y，总是取所有函数值的集合(例如，对于 $\sqrt{1-x}$，它是所有的 $y\geqslant 0$ 这集合)．这种函数叫做**数值函数**．

在更高深的书刊中，不能假设 f 由一公式给出，以及从公式能得出定义域与值域．此外，我们也不愿意把 X 与 Y 局限为 R 的子集．在本书中，X 与 Y 经常会是不同维的欧几里得空间的子集：$X\subset R^m$ 而 $Y\subset R^n$．所以我们必须小心区别每一个函数的 X 与 Y．我们也不总是假设 Y 恰好是函数值的集合；它可能大一些．让我们首先考虑某些较熟悉的、几何地定义的函数．

平面的一个*平移*是一函数 $f:R^2\to R^2$．它是一种刚体的均匀运动的结果，其中每个点走过一线段或向量；向量是各点所走过的路径，一律平行，且有相同的长度与方向．只要用一点所描出的向量就能完全刻划一个平移，因为别个点的向量可以照样得出．于是，若已知 f 把点 p 带到点 q，则 f 将把点 p' 带到点 q' 使 p, q, p', q' 形成一个平行四边形．例如，若 f 把原点 $(0, 0)$ 带到 $(2, -3)$，则它把 (x_1, x_2) 带到点 (x_1+2, x_2-3)．所以 f 的公式是：$y_1=x_1+2$ 与 $y_2=x_2-3$．

平面的一个*旋转*是一个函数 $f:R^2\to R^2$，另一个刚体运动的结果；这次是围绕一个叫做旋转中心的定点 z 的转动．f 把每一个中心为 z 的圆周变成它自身，并且把每一条从 z 出发的射线(包含起点的半直线)变成另一条射线．这样的两射

线间的夹角叫做旋转角，而且任一条射线都旋转同样的角度。中心与旋转角完全刻划了旋转。

R^2 的对于其中一条直线 L 的*反射*是一个函数 $f: R^2 \to R^2$；它是一个刚体运动，使 L 上的每个点固定，而使 L 的两侧互换。最形象的办法：把它看成是这平面在空间中绕直线 L 旋转 $180°$ 的结果。

平面变成它自身的任何一个刚体运动的结果是一个平移，或是一个旋转，或是一个反射，或是一个反射后又紧跟着一个平移；这个事实是能证明的。平面中图形的形状和大小不改变；只它们的位置与定向可能改变。这些函数都是初等几何中的*全等*。

平面的一个*相似变换*是一个函数 $f: R^2 \to R^2$，它把所有长度都改变成 r 倍，这里 r 是一个常数。作为一个例子，取定 R^2 的一点 z，令 $fz = z$。并且，对于每一个其它的点 $x \neq z$，在从 z 到 x 的射线上，作从 z 开始的线段，使其长度是从 z 到 x 的线段（或向量）长度的二倍，然后定义 fx 是这个新作的线段（或向量）的终点。这个 f 所用以改变长度的倍数是 $r=2$。这样一个以 $r>1$ 为倍数的 f 叫做以 z 为中心的一个*放大*。当 $r<1$ 时，f 叫做一个*收缩*。$r=1$ 时的相似变换是上述刚体运动的一种。$r \neq 1$ 时的相似变换总有一个固定点 z，它是以 z 为中心的一个收缩或一个放大，再跟着作一个绕 z 的旋转或作一个对于过 z 的某条直线的反射。相似变换永远使直线变成直线，并且不改变线与线之间夹角的量度。它能改变一个图形的大小、位置与定向，却不改变它的形状。

令 L 为平面 R^2 中的一条直线。*垂直射影* $f: R^2 \to L$，规

定 R^2 的每一点 x 的象点 fx 是从 x 到 L 所引垂线的垂足.

令 S 为 R^3 中的以 z 为球心的一个球面. 径向射影 f: $R^3-z\to S$, 规定 R^3 每一个不是 z 的点 x 的象点 fx 是从 z 到 x 的射线与 S 的交点.

前面的一些例子,部分地说明我们将感兴趣的那种函数. 为了描绘这样的函数,并对它们进行有意义的叙述,我们采用象与反象或原象这两个概念. 若 $f: X\to Y$ 与 $A\subset X$, 则 A 在函数 f 作用下的象,或简单地说 A 的 f 象,用 fA 表示,它是 Y 的子集,由全体 $x\in A$ 的 fx 值组成. 确切地说,一点 $y\in Y$ 是在 fA 内,指的是,至少有一个 $x\in A$, 使 $fx=y$. 人们能把 fA 看作是对于整个 A 运用 f 的结果. 例如,在一刚体运动或一相似变换 $f: R^2\to R^2$ 的作用下, R^2 的任一直线 L 的象是 R^2 的一直线 fL. 在垂直射影 $f: R^2\to L$ 下, R^2 的每一线段 A 的象,是 L 上的一线段 fA(见图 2.1),当 A 与 L 垂直时是 L 上的一个单独的点(图 2.2). 在径向射影 $f: R^3-z\to S$ 下, R^3 的不通过 z 的每一条直线 L 的象 fL 是 S 上一个大的半圆,不包含端点(图 2.3).

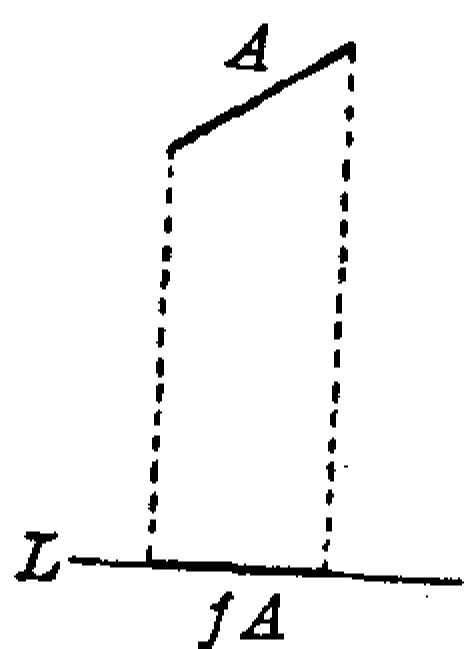


图 2.1

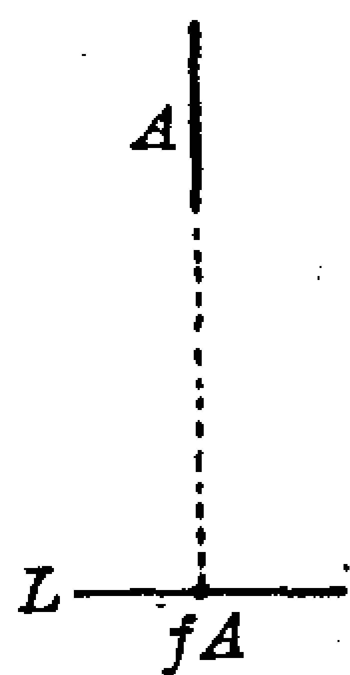


图 2.2

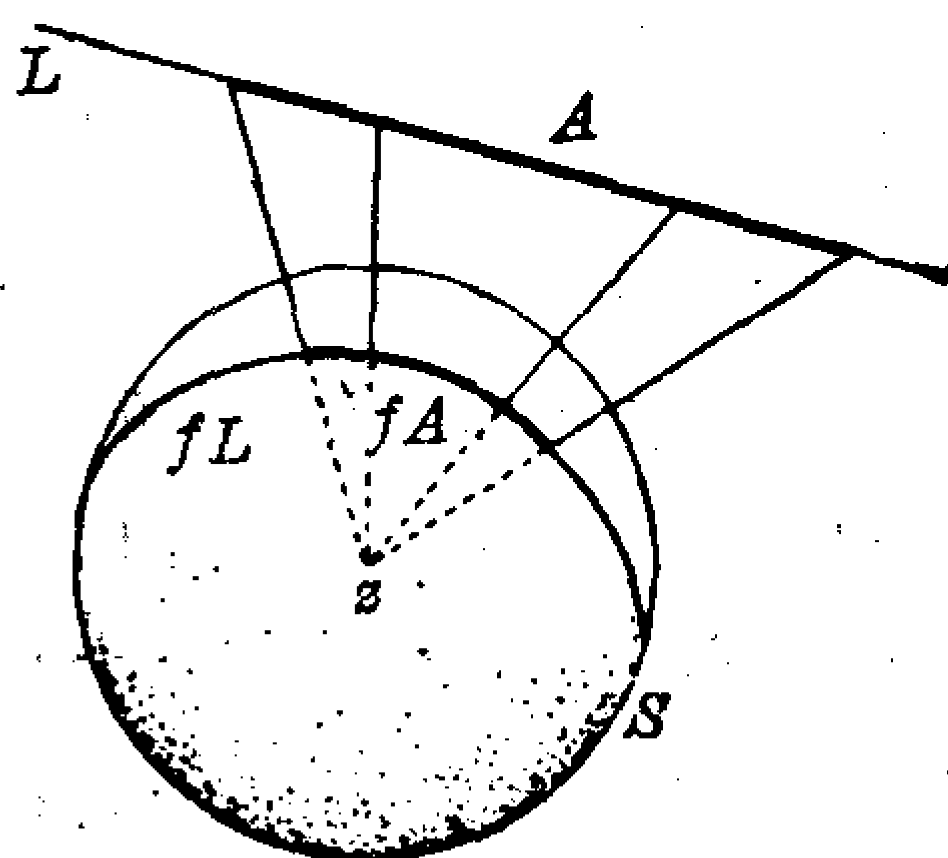


图 2.3

如果考虑 R^3 对于一个平面的任意反射,就明白我们用"象"这个字的来源.

如果$f: X \to Y$与$B \subset Y$，则使$fx \in B$的那些点x，形成X的一个子集，叫做在f下的B的反象或原象，用$f^{-1}B$表示。在垂直射影$R^2 \to L$作用下，L的单独一个点y的原象，是在y处与L垂直的直线；而线段的反象或原象，是该线段在其两端点处向L所引两垂线之间所夹的一长条。在径向射影$R^3 - z \to S$下，S的一点y的反象或原象是从z出发通过y而删去z的半直线。S上一个圆域的反象或原象是挖去顶点的一个圆锥。

令$f: X \to Y$且$A \subset X$。则A的象也在Y中。如果Y的一个子集B包含fA，则对于所有的$x \in A$，由$gx = fx$定义的函数$g: A \to B$叫做f在A与B上的**限制**。最经常需要的是只限制f的定义域，在这种情况下，f在A与Y上的限制用$f|A$表示(读作：f在A上的限制)。例如，如果$f: R^2 \to R^2$是平移，而L是R^2中的一条直线，则$f|L$是移L到与它平行的位置。

如果有两个函数$f: X \to Y$与$g: Y \to Z$，则能把这两个函数复合成一个新函数，用$gf: X \to Z$表示；它对于X中的每个x，在Z中规定$g(fx)$这个元素。例如，令f与g为平移$R^2 \to R^2$，其中f把每个点向东移两个单位，而g把每个点向北移两个单位。那末，gf是把每个点向东北移动$2\sqrt{2}$单位的平移。作为第二个例子，令f与g为由公式

$$fx = x^2 + 1, \quad gx = 2 - x$$

给出的数值函数$R \to R$。则能形成复合函数gf与fg，由下列公式给出：

$$gfx = g(fx) = 2 - (x^2 + 1) = 1 - x^2,$$

$$fgx = f(gx) = (2 - x)^2 + 1 = 5 - 4x + x^2.$$

有些简单的函数如果不特别地提出来，人们会觉察不到

它们的存在．首先提常函数：一个函数 $f: X \to Y$ 是一个常函数，如果象 fX 是 Y 的一个单独的点．对于 Y 的每一个点，有一个常函数．其次，集 X 的恒同函数：对于每一个 $x \in X$，函数 $f: X \to X$ 都使 $fx = x$．最后，若 $A \subset X$，对于每一个 $x \in A$，函数 $f: A \to X$ 使得 $fx = x$，则 f 叫做包含函数．显然，包含函数是恒同函数在子集上的限制．一个常函数的任一限制是常函数．

函数 $f: X \to Y$ 称为一对一的（简记为 1-1），如果 Y 的每一点是 X 的一个点而且只是一个点在 f 下的象†，在这种情况时，如果对应于 Y 的每一点 y，指定 X 中的使 $fx = y$ 成立的唯一的点 x，就是从 Y 到 X 的一个函数，称为 f 的反函数，用符号 $f^{-1}: Y \to X$ 表示．例如，平面的每一个刚体运动都是一对一的．如果 f 是由以 p 与 q 为端点的线段规定的从 p 到 q 的平移，则 f^{-1} 是从 q 到 p 的平移．旋转的反函数是具有同一个中心，而角的大小相同但方向相反的一个旋转．平面的相似变换也是一对一的．倍数为 $r > 1$ 的放大的反函数是具有同一中心而倍数为 $1/r$ 的收缩．

在处理数值函数时，人们企图从 $y = fx$ 求出 f 的反函数的公式，即用 y 表出的解 x．于是，开平方根是平方的反函数，而对数是指数的反函数．在某些点的原象不是单独的点的情况下，人们就把 f 限制在一个子集上，以获得一个一对一的函数．例如，如果 $fx = x^2$，从 $y = x^2$ 得到 $x = \sqrt{y}$ 与 $x = -\sqrt{y}$，但如果把 f 的定义域限制在正数与零这子集 A 上，也把 f 的值域限制在同一个子集上，则这被限制的函数 g 是一对一的，

---

† 有些作者称函数 $f: X \to Y$ 是一对一的，如果 Y 的每一点是 X 的至多一点的象，这样就允许 fX 可以不是 Y 的全体；而如果 $fX = Y$，则说 f 是一对一且满的．

而它的反函数是通常的方根函数 $g^{-1}y=\sqrt{y}$. 在指数函数 $fx=10^x$ 的情形，只需要把 f 的值域限制在正数集上，即得一对一的函数。

虽然所列举的函数例子，已经各色各样，但它们仍不足以使人们理解到函数概念是怎样的广泛和基本．作为广义的函数的一个例子，考虑"男孩的母亲"这概念．男孩的集合为定义域 X，妇女的集合为值域 Y，对每个男孩 x 指定他的母亲为 fx. 我们的经历中充满着这样的例子：书的颜色，屋子的顶，等等．什么时候用到"的"字，就出现一个函数．名词的所有格出现时也如此。

科学中到处是函数．化学反应的结果是放在一起的化学物的函数．物理实验的结果是实验装置条件的函数。

回到数学方面来，处处都有"那个的这个"这样形式的话．例如：圆的面积，线段的中点，角的平分线，两个集合的并集等等．这些例子的每一个都是一个函数．在两集的并集情形下，函数定义域的一个元素，是已知集合 X 的一对子集 (A, B)，而它的值域是 X 的子集的集合。

许多函数都能用几何图描绘出来．例如，x 与 y 两数的和 $x+y$ 能看成是一个函数 $f: R^2\to R^1$，把每一对 (x, y) 看成是 R^2 中的一个点，f 就是平面到一条直线上的射影．方程为 $x+y=3$ 的直线是 $f^{-1}3$. 其它数的反象形成平行线族(见图 2.4)．如果把值域 R^1 描绘成一条垂直于这平行族的直线，则 f 能看成为盖满这条直线的垂直射影。

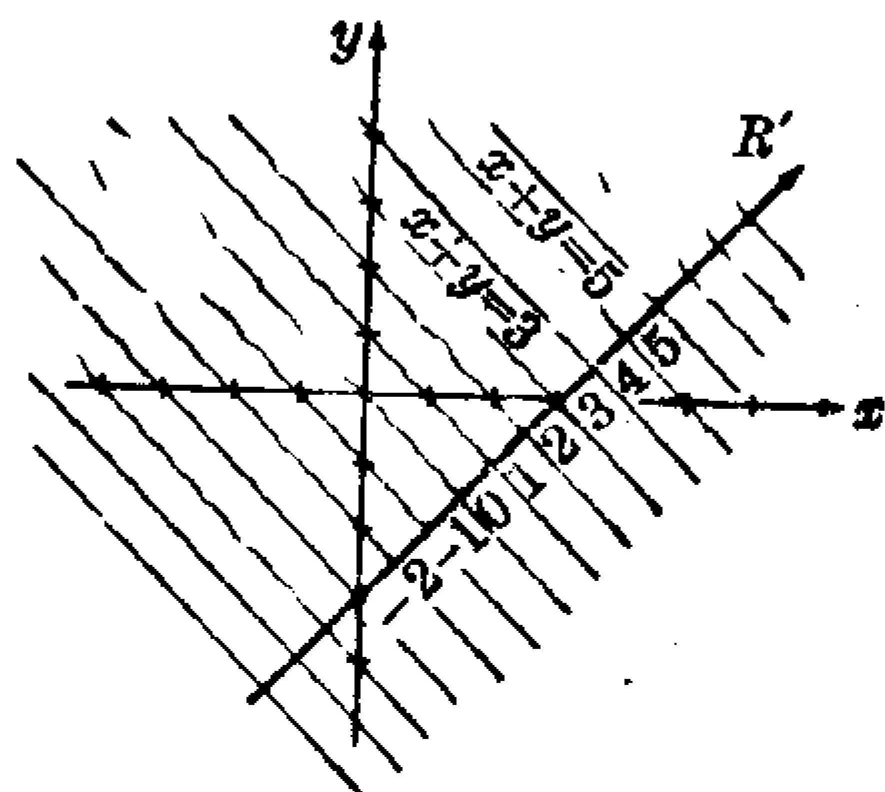


图 2.4

习　题

1. 若 A, B, C 都是一个集合 X 的子集，证明

$$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C),$$

并用 R^2 中集合的图来说明这结果.

2. 若 A 与 B 是 X 的子集，证明

$$(X-A)\cap(X-B)=X-(A\cup B).$$

3. 若 A 与 B 是集合 X 的子集，并且 $A\subset B$，证明

$$A\cap(X-B)=\emptyset.$$

4. 证明在 $f: X\to Y$ 的作用下，f 象的下列性质：

   (a) 若 A 与 B 都是 X 的任意子集，则 $f(A\cup B)=fA\cup fB$,

   (b) $f(A\cap B)\subset fA\cap fB$,

   (c) 若 $A\subset B\subset X$，则 $fA\subset fB$.

5. 北极处的球极平面射影是一个函数 f，它的定义域 X 是删去北极的球，而值域 Y 是不包含北极且与赤道平行的平面. 球(排除北极)的每一点 x 的象 fx，是以北极为起点的、通过 x 的这一射线与值域平面的交点 y(见图 2.5). 假设值域平面 Y 与球在南极 S 处相切.

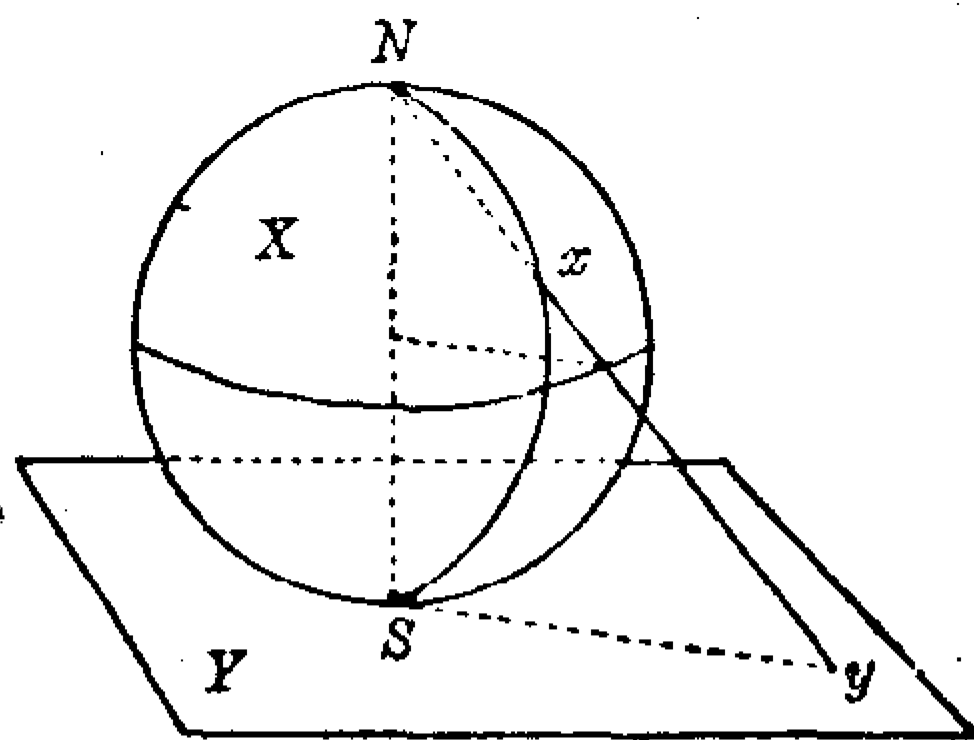


图　2.5

   (a) 画出纬线的一平行线的象.

   (b) 画出一条经线的象.

   (c) Y 中的一直线段的反象是什么?

   (d) 赤道的象是平面上的一个圆. 象圆的半径与球半径有什么关系?

   (e) 通过南极的半直线的反象是什么?

6. 若 f 是由公式 $y_1=x_1+3$, $y_2=x_2-4$ 给出的平移 $R^2\to R^2$，而 g 是由 $y_1=-x_1$ 与 $y_2=x_2$ 给出的反射；求复合函数 gf, fg 的公式，反函数 f^{-1}, g^{-1}, $(gf)^{-1}$ 以及复合函数 $f^{-1}g^{-1}$ 与 $g^{-1}f^{-1}$ 的公式. 是否

$(gf)^{-1}=g^{-1}f^{-1}$?

7. 设 $f:X\to Y$.

(a) 若 A, B 都是 Y 的子集，试证

$f^{-1}(A\cup B)=f^{-1}A\cup f^{-1}B$ 与 $f^{-1}(A\cap B)=f^{-1}A\cap f^{-1}B$.

(b) 求 $f^{-1}Y$ 与 $f^{-1}\emptyset$.

(c) 若 $A\subset B$, 问反函数 $f^{-1}A$ 与 $f^{-1}B$ 有何关系?

8. 设 $f:X\to Y$ 与 $g:Y\to Z$. 证明对于每个 $C\subset Z$, 有

$$(gf)^{-1}C=f^{-1}(g^{-1}C).$$

若 f 与 g 都是一对一的，证明 gf 一对一，而 $(gf)^{-1}=f^{-1}g^{-1}$.

3. 邻域与连续

若 x 与 y 是 R^n 中的两个点，所谓它们之间的**距离**，指的是平常的直线距离，用 $d(x, y)$ 表示. 在用 x 与 y 的坐标时，能根据下列公式计算：

$$d(x, y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}.$$

这个公式是应用勾股定理的推广而获得的. 在 $n=1$ 时，这公式简化为 $d(x, y)=|x-y|$ ($x-y$ 的绝对值). 现在我们不直接用这个公式，而只用距离函数 $d(x, y)$ 的、能用这公式加以证明的某些性质. 这些性质都是众所周知的，现在把它们列举出来而不加证明.

首先，若 x 与 y 是不同的点，则 $d(x, y)>0$. 其次，$d(x, x)=0$ 对于所有的 x. 再次，对于每一对点 x 与 y, 距离是对称的：$d(x, y)=d(y, x)$. 最后，对于任意三个点 x、y 与 z, 有

$$d(x, z)\leqslant d(x, y)+d(y, z).$$

最后这个叫做"三角不等式"，因为它断言：三角形两边的长度之和大于或等于第三边的长度.

让我们回忆一下，在第一节中我们初步检验各种图形时，图形有否断裂对于我们的结论是否成立起着决定性作用．就是因为这一原因，所以主要定理中的函数必须是连续的．那时候我们用几何图形来直观地描述连续性；它的确切定义要用到另一个概念，即邻域的概念．现在给出邻域的定义．

定义 令 X 为 R^n 的一个子集，x 为 X 中的一点，r 为一正实数．然后，把 X 中的、与 x 距离小于 r 的点的全体，定义为 x 的、在 X 中的、以 r 为半径的邻域，用 $N(x, r, X)$ 表示，而在 X 明白无误，不会引起误会时，可简单地用 $N(x, r)$ 表示。

例如，若 $X=R^n$ 而 $n=2$，则 $N(x, r, R^2)$ 恰好是以 x 为中心、以 r 为半径的圆的内部．同样，x 在 R^3 中的、半径为 r 的邻域是以 x 为中心、以 r 为半径的球的内部．在 $n=1$ 时，$N(x, r, R)$ 就是以 x 为中点、长度为 $2r$ 的开区间 $(x-r, x+r)$．当 X 不是整个 R^n 时，则 $N(x, r, X)$ 恰就是 X 的位于 $N(x, r, R^n)$ 内部的那部分（见图 3.1），即 X 自身与 x 在 R^n 中的邻域 $N(x, r, R^n)$ 的交集：

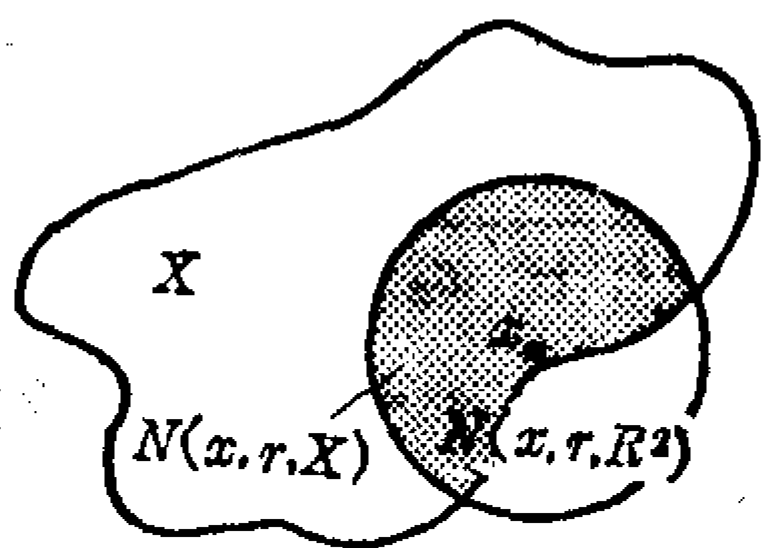


图 3.1

$$N(x, r, X)=X\cap N(x, r, R^n)^{1)}.$$

现在我们来谈函数的连续性这个重要概念．

定义 设 $f: X\to Y$ 是一个函数，其中 $X\subset R^m$ 而 $Y\subset R^n$，

1) 读者容易看出：当 $X=R^n$ 时，这个式子也成立．于是，不论 $X\subset R^n$ 或 $X=R^n$，对于 $x\in X$ 以及对于 x 的、在 X 中的、以 r 为半径的邻域 $N(x, r, X)$ 与在 R^n 中的、以 r 为半径的邻域 $N(x, r, R^n)$，这个式子都成立．——译者注

又设 $x\in X$. 如果对于 fx 的、在 Y 中的每一个邻域, X 中存在 x 的某一个邻域, 它的 f 象被包含在 fx 的所考虑的邻域中,则说 *f 在 x 处连续*.

为了简短地表达这个条件,按照微积分中惯用的记号,用 ϵ 与 δ 表示这些邻域的半径, 把它们分别叫做 ϵ 邻域与 δ 邻域. 则这条件能重述如下: 对于每一个正数 ϵ, 存在一个正数 δ, 使 x 的 δ 邻域的 f 象,属于 fx 的 ϵ 邻域:

$$fN(x, \delta, X)\subset N(fx, \epsilon, Y).$$

若 f 在 X 的每一点处连续,则说函数 *f 在 X 中连续*.

若把 δ 和 ϵ 解释为接近的程度, 则定义可以意译为: 人们只须要求 x' 足够接近 x, 就能使 fx' 接近 fx. 更粗略的意译是: x 的微小改变,引起 fx 的微小改变.

拓扑学中只注意连续函数, 并把"连续函数"这术语缩简为"映射". 所以球极射影就是从挖去了极的球面到平面的映射. 然而,为了说明连续性定义的意义,让我们来考察几个不连续函数的例子.

作为第一个例子, 令 $f: R^2\to R^2$ 使平面上除去一个点 p 外,每个点都固定不动,而令 $fp=q$ 为另一个点. 为着说得具体, 可取 p 为坐标原点 $(0, 0)$ 而 q 为 $(1, 0)$. 那么, f 在非 p 的每一点处连续. 要看出它在 p 处不连续,取 ϵ 为 $d(p, q)$ 的一半, 使得 $N(q, \epsilon)=N\left(q, \frac{1}{2}\right)$ 为以 $(1, 0)$ 为中心, 以 $\frac{1}{2}$ 为半径的圆的内部 (见图 3.2). 这时候, 没有 p 的邻域会映到 $N\left(q, \frac{1}{2}\right)$ 中, 因为 p 的每个邻域都包含有不在

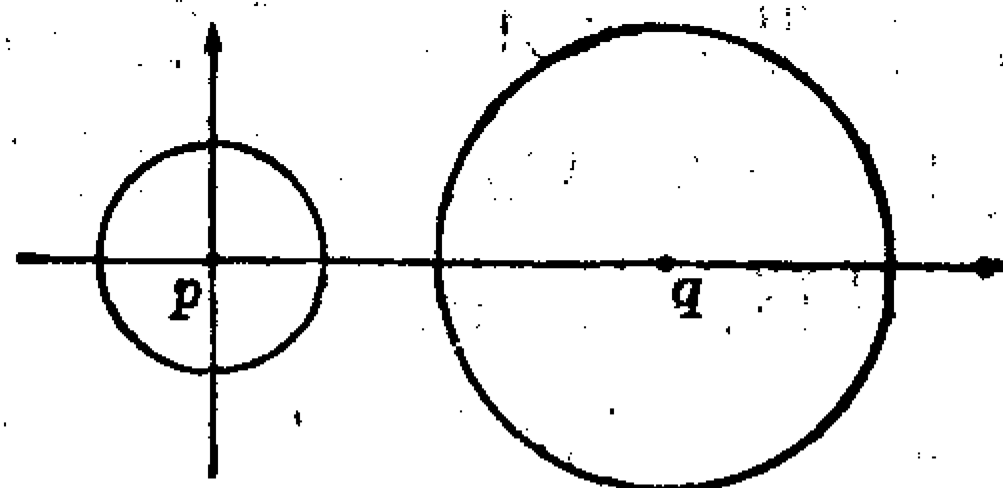


图 3.2

$N\left(q, \frac{1}{2}\right)$中的点，而 f 又使这些点不动，从而这些点的 f 象不在 $N\left(q, \frac{1}{2}\right)$中．$\left(\text{图3.2给出邻域} N\left(p, \frac{1}{4}\right)\right.$；其中的点只有 p 的 f 象 $fp=q$ 在 $N\left(q, \frac{1}{2}\right)$中．$\Big)$因为对于 $\epsilon=\frac{1}{2}$，不存在相应的 $\delta>0$ 使得 $fN(p, \delta)\subset N\left(q, \frac{1}{2}\right)$，所以 f 在 p 处不连续．直观的几何图形是：f 把点 p 从平面挖出来，再把它粘到点 q 处．

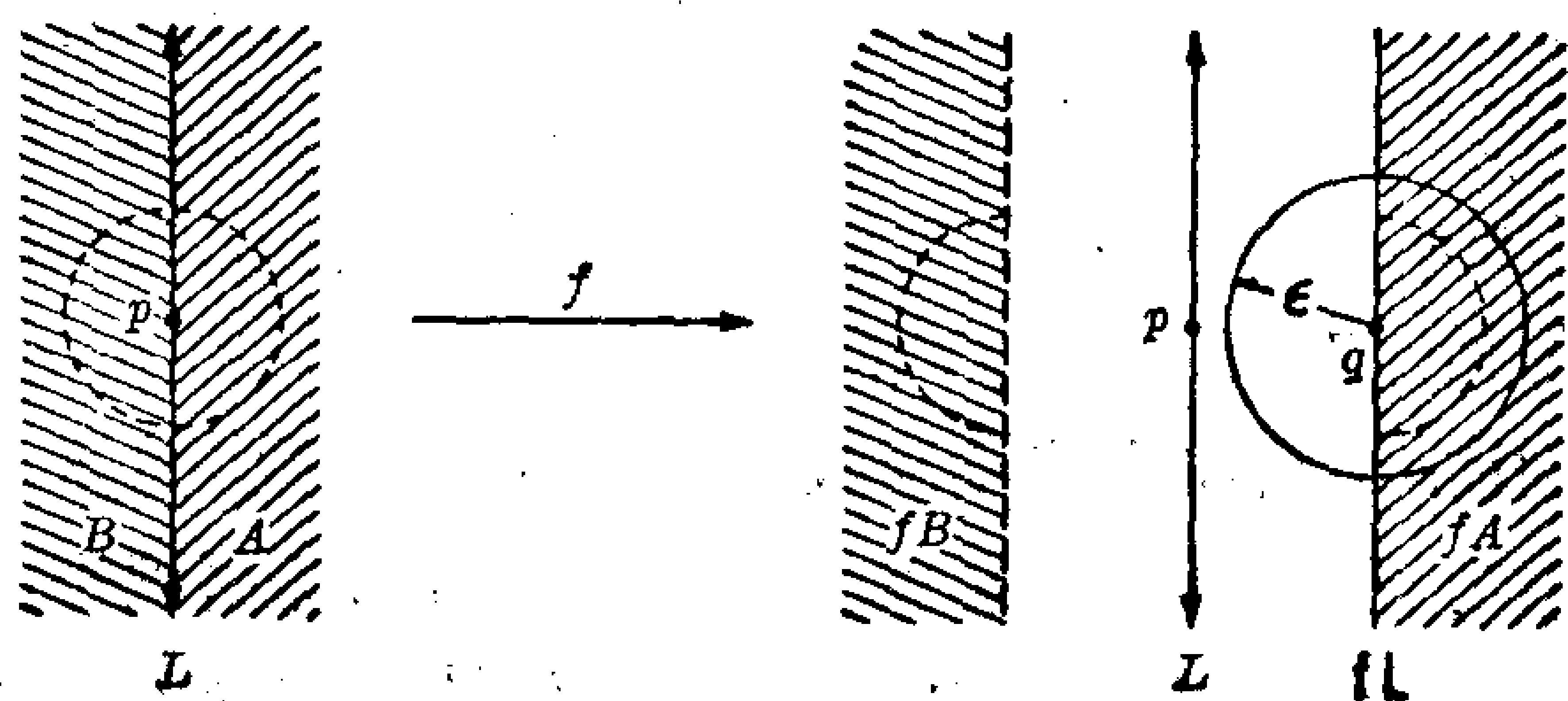


图 3.3

下面的第二个例子显示出不连续的另一种类型．把平面 R^2 分成两半(半平面)A 与 B，其中 A 包含所有使 $x_1\geqslant 0$ 的点(x_1, x_2)，而 B 是它的补集．注意 $x_1=0$ 这条铅垂线 L 包含在 A 中(见图3.3)．定义 f 为从 R^2 到 R^2 的这么一个函数，使得 f 在 A 上的限制是向右平移一个单位，而 $f|B$ 是向左平移一个单位．f 把两个半平面 A 与 B 分裂开，A 移向右，B 移向左．因为 $L\subset A$，L 移向右．函数在 L 外的每点处都连续，而在 L 的每点处都不连续．为了证明后一断言，令 $p\in L$，令 $q=fp$，并令 ϵ 为小于 2 的任一正数．于是在 R^2 中 q 的、以 ϵ 为半径的邻域，即 $N(q, \epsilon)$，不包含 fB 的点，而每个 $N(p, r)$包含 B 的点．如图3.3所示，p 的任何邻域的左

半(由虚点的圆表出)在 f 的作用下离开了 $N(q, \epsilon)$. 因而没有对应的 δ, 使得 R^2 中的、p 的、以 δ 为半径的邻域的象, 包含在 q 的、以 ϵ 为半径的邻域中, 即使得

$$fN(p, \delta) \subset N(q, \epsilon).$$

直观的图形是: f 把平面沿 L 割裂, 再把两半分离开.

为着说明连续性的定义符合我们的直觉, 还可用第一节中所举的不连续性的例子的图形来检验. 在图 1.5 中, 若邻域 $N(r, \epsilon)$ 的半径 ϵ 小于距离 $d(r, s)$ 的一半, 则 o 的任一邻域包含 X 的许多点, 它们的象不在这个 $fo=r$ 的 ϵ 邻域中. 同样, 在图 1.6 中, 若 ϵ 是比距离 $d(r, s)$ 与 $d(r, t)$ 中较小的还小, 则 o 的任何邻域又包含着许多点, 它们的象不在 $fo=r$ 的、以 ϵ 为半径的邻域中.

要证明函数在某点不连续, 只需要指出: 对于单独的一个 $\epsilon>0$, 不存在 δ. 要证明连续, 经常比较困难些, 因为要指出: 对于每个可能选出的 ϵ, 怎样找出与它相对应的数 δ (就是必须显示出 δ 为 ϵ 的一个函数). 然而, 对于一些简单函数, 这并不困难; 现在我们就来考虑这些函数.

对于任一个 $X \subset R^n$, 恒同函数 $f: X \to X$ 连续. 回忆恒同函数的定义: 对于所有的 $x \in X$, $fx=x$. 对应于 $x \in X$ 与一个 $\epsilon>0$, 取 $\delta=\epsilon$. 显然 f 把 $N(x, \delta, X)$ 映入 $N(fx, \epsilon, X)$, 因为 f 使每一点不动, 故这两邻域重合. 同样, 若 $A \subset X$, 则包含函数 $f: A \to X$ 连续; 因为它是一个映射. 还取 $\delta=\epsilon$, 并利用 $N(x, \delta, A)=A \cap N(x, \delta, X)$ 这一事实.

任意常函数 $f: X \to Y$ 连续. 在这情形下, fX 为 Y 的一个单独的点, 譬如说 q; 因而对于每一个 x 与对于每一个 $\epsilon>0$, 以及 $r>0$, $fN(x, r, X) \subset N(q, \epsilon, Y)$; 故不妨取 $\delta=\epsilon$.

任意一个刚体函数 $f: X \to Y$ 连续. 所谓"刚体"函数, 是指不改变距离的函数:

$$d(fx, fx') = d(x, x'), \text{ 对于所有的 } x, x' \in X.$$

例如, R^2 的平移、旋转、与反射是刚体的. 要证明在点 $x \in X$ 处连续, 对于每个 $\epsilon > 0$, 可取 $\delta = \epsilon$. 然后, 若 $x' \in N(x, \delta, X)$, 则有 $d(x, x') < \epsilon$, 所以 $d(fx, fx') < \epsilon$, 因而 $fx' \in N(fx, \epsilon, Y)$. 用话来说, 因 f 的刚体性, x 的 ϵ 邻域的 f 象在 fx 的 ϵ 邻域中.

使距离紧缩的函数 $f: X \to Y$ 连续. 紧缩这一条件由下式表出:

$$d(fx, fx') \leqslant d(x, x'), \text{ 对于所有的 } x, x' \in X.$$

再对于所有的 x, 取 $\delta = \epsilon$, 并且应用上一段的论证.

任一相似函数 $f: X \to Y$ 连续. 这里的条件是把所有的距离改变同一个倍数, 譬如说, 是 k 倍:

$$d(fx, fx') = kd(x, x'), \text{ 对于所有的 } x, x' \in X.$$

若 $0 \leqslant k \leqslant 1$, 则 f 为压缩而可引用前一段. 当 $k > 1$ 时, 对于所有的点 x, 取 $\delta = \epsilon/k$. 然后, $x' \in N(x, \epsilon/k, X)$ 蕴涵 $d(x, x') < \epsilon/k$. 这能写为 $kd(x, x') < \epsilon$. 上面的等式就产生 $d(fx, fx') < \epsilon$, 从而 $fx' \in N(fx, \epsilon, Y)$. 例如, 若 $k = 2$ 而 f 使距离双倍, 则以邻域 $N(fx, \epsilon, Y)$ 的半径之半为半径的 x 邻域的 f 象 $\subset$ 邻域 $N(fx, \epsilon, Y)$.

所谓从球心 z 到球 S 的径向射影是函数 $f: R^3 - z \to S$. f 是满的, 是连续的. f 把 S 外部的两个点投射到 S 上, 缩小了它们之间的距离, 所以那限制在 S 外部的 f, 显然连续. 然而, 限制在 S 内部的 f 放大距离; 如果两点在球内移动, 当它们离球心越近时, f 把它们之间的距离放大的倍数就越大. 要证明在一点 $x \neq z$ 处连续, 作为 ϵ 的函数的 δ 的表达式相当复

杂，但注意到各种相似三角形以及用一点儿代数，仍然能得到这个表达式(看后面习题中的第9题)．我们也能几何地得出一个 δ 如下．令 t 为 S 与以 fx 为中心、以 ϵ 为半径的球的一个交点．图 3.4 显示出通过 x, fx 与 t 这三个点的平面的截面．令 δ 为从 x 到 zt 线的垂直距离．于是球 $N(x, \delta)$ 内部的每个点的投影落在 $N(fx, \epsilon, S)$ 中．

图 3.4

习　　题

1．哪样的 x, y, z 三点会使三角不等式中的等式成立；即使

$$d(x, z)=d(x, y)+d(y, z)?$$

2．若 x' 是邻域 $N(x, r, X)$ 中的一点，证明有一数 $r'>0$ 使

$$N(x', r', X)\subset N(x, r, X).$$

保证这个式子成立的、r' 的最大值是什么？

3．在检验函数 $f: X\to Y$ 在一点 x 处连续中，若找得一个 $\delta>0$ 对 $\epsilon=\frac{1}{2}$ 有效，为什么同一个 δ 对所有的 $\epsilon\geqslant\frac{1}{2}$ 都有效？

4．如同在第3题中，若求得一个 $\delta>0$ 对于 $\epsilon=\frac{1}{2}$ 有效，为什么比 δ 较小的任意值对 $\epsilon=\frac{1}{2}$ 都有效？

5．分平面 R^2 为两部分 A 与 B，其中 A 包含以 z 为中心，以1为半径的圆周上以及圆内的所有点，而 B 是 A 在 R^2 中的补集．定义 $f: R^2\to R^2$ 由 $f|A$ 将 A 围绕中心旋转一个 90° 的角，而 f 保留 B 的每个点固定．问 f 在何处连续又在何处不连续？在一个不连续的点处，对于 ϵ 的什么值没有相对应的 δ？

6．若 L 是 R^3 中的一条直线或一平面，说明为什么垂直射影 $f: R^3\to L$

连续.

7. 令 S 为以 1 为半径、以 R^3 的原点为中心的球面，令 $p=(0, 0, 1)$ 为 S 的北极，而令 $f:S-p\to R^2$ 为从点 p 到赤道平面上的球极平面射影. 作一图表明 f 连续. 在 $S-p$ 的哪部分 f 是收缩函数? 证明 f 是一对一的，并且 $f^{-1}:R^2\to S-p$ 也连续. 对于 r 值小于一，删去北极的邻域 $N(p, r, S)-p$ 的 f 象是什么? 为什么不能定义 fp 把函数 f 扩展成一连续函数?

8. 若 f 与 g 都是从区间 $[a, b]$ 到 R 的连续函数，证明 $f+g$ 与 $f-g$ 都连续. 提示: 要证明 $hx=fx+gx$ 与 $kx=fx-gx$ 在 x 处连续，可对于所有 $x, x'\in[a, b]$，借助于三角不等式

$$|(fx\pm gx)-(fx'\pm gx')|\leqslant|fx-fx'|+|gx-gx'|,$$

来估计 $|hx-hx'|$ 与 $|kx-kx'|$.

9. 令 $f:R^3-z\to S$ 为从球心 z 到球面 S 上的径向射影(见图3.4). 令球 S 的半径为 1. 证明图中的 δ 作为 ϵ 的函数由下式给出:

$$\delta=d\epsilon\sqrt{1-\epsilon^2/4},$$

其中 d 是从 x 到 z 的距离. 提示: 从 z 到由 fx 到 t 的弦作一垂线，令 θ 为在 z 处由 fx 与 t 所决定的角的一半，并用恒等式 $\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$.

4. 开集和闭集

设 X 是 R^n 的一个子集. 我们的目的是要定义并研究 X 的一类特别的子集，即所谓的 X 的开集. 它们将在随后的讨论中扮演主要角色，因为借助于它们，才能容易表达出所要讨论的 X 的各种拓扑性质. 还有，用开集时，函数连续的条件取一个很简单的形式.

不容易事先看出: 为什么开集这个概念会是一个重要概念. 它逐渐得到承认，是一个历史事实. 在拓扑发展的早期(1900—1930)，对这一课题人们曾采取各种途径，作过各种不

同的探讨．人们曾采用过诸如下列名词所表达的概念：邻域空间，度量空间，极限点，序列极限以及闭包．当时并未弄清楚这些途径都等价，都殊途同归；也无人能预言拓扑的发展方向与最终形式．直到这个时期的末期，才逐渐弄清楚下述事实：开集概念是探讨所有拓扑性质的简单而灵活的工具．从那以后，人们公认开集这个概念所提供的途径最优越．

定义 令 X 为 R^n 的一个子集．若对于 X 的子集 U 的每一点 x，U 包含 x 的、在 X 中的某邻域，则称子集 U 为 X 的开集．条件可重述如下：对于每一点 $x\in U$，有一个数 $r>0$，使 $N(x, r, X)\subset U$．

我们不久会看到，开集是易于遇到的，并且以各色各样的形式出现．我们的第一类例子，就是 X 中的点的邻域：

凡邻域都是开集．

设已知 $x_0\in X$ 与 $r_0>0$．要证明上述断言，必须证明 $N(x_0, r_0, X)$是 X 的开集（见图 4.1）；这就需要指出：对于每一点 $x\in N(x_0, r_0, X)$，存在一正数 r，使邻域 $N(x, r, X)\subset N(x_0, r_0, X)$．令 $r=r_0-d(x, x_0)$．现在 $x\in N(x_0, r_0, X)$ 指的是 $d(x, x_0)<r_0$；因此 r 必为正数．令 $y\in N(x, r, X)$；于是 $d(x, y)<r$．从三角不等式可知

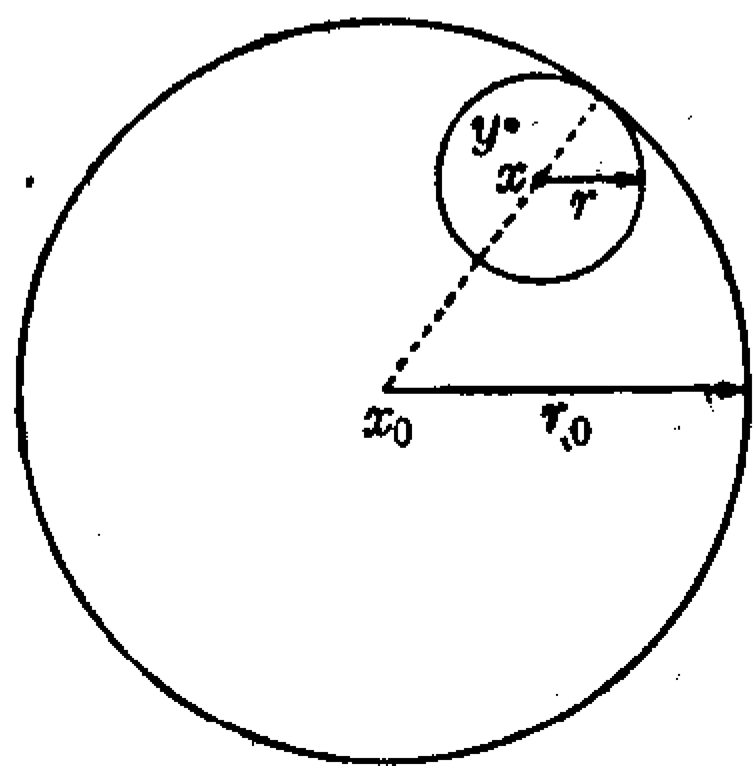


图 4.1

$$d(x_0, y)\leqslant d(x_0, x)+d(x, y);$$

又因 $d(x, y)<r$，有

$$d(x_0, y)<d(x_0, x)+r.$$

但由我们的 r 的定义，$d(x_0, x)+r=r_0$，因此，

$$d(x_0, y) < r_0.$$

这就表明 $N(x, r, X)$ 的任一点 y 是 $N(x_0, r_0, X)$ 的一个点，所以 $N(x_0, r_0, X)$ 是 X 的开集.

下面的一些定理说明怎样从已知的开集作出另外的开集.

定理 4.1 若 U 与 V 都是 X 的开集，则它们的交集 $U\cap V$ 是 X 的一个开集. X 的任何有限个开集的交集是 X 的一个开集.

为着证明第一个断言，令 $x\in U\cap V$. 因 $x\in U$ 且 U 是开集，有一个 $r>0$ 使 $N(x, r, X)\subset U$. 因 $x\in V$ 而 V 是开集，有一个 $s>0$ 使 $N(x, s, X)\subset V$. 设 t 为 r 与 s 中较小的那个；显然 $N(x, t, X)$ 在 U 与 V 中，故在 $U\cap V$ 中. 这就证明 $U\cap V$ 是开集. 为着证明第二个断言，假设 x 在每一个开集 $U_1, U_2, \cdots, U_k$ 中. 于是有数 $r_i>0$ $(i=1, 2, \cdots, k)$ 使 $N(x, r_i, X)\subset U_i$. 取这些 $r_1, r_2, \cdots, r_k$ 中最小的一个，设为 t. 显然 $N(x, t, X)$ 在交集中，这就完成了证明.

在上面的论证中，我们假设 $U\cap V$ 中有点 x. 若 U 与 V 无公共点，即

$$U\cap V=\emptyset=\text{空集},$$

我们还必须根据开集的定义来验证空集是开集. 要求这样的验证，乍一看，似乎有些迂腐气；但却是严格地符合逻辑的. 因 $\emptyset$ 没有点，所以它的每个点有一个邻域包含在 $\emptyset$ 中. 这说法是正确的，所以 $\emptyset$ 是开集. 从相反的角度想一想. 若集合 A 不是 X 中的开集，A 就包含某个点，而不包含该点[在 X 中][1] 的邻域；所以一个非开集是一个非空集. 这一事实极关

1) [在 X 中]是译者加的。

重要，它连同另一个重要事实，即一集合是它自己的开集，足够正式作为一个定理。

定理4.2 空集$\emptyset$是X的一个开集，并且X自身是X的一个开集。

第二个命题显而易见。因由邻域的定义，对于每个$x\in X$，和所有的$r>0$，

$$N(x,\ r,\ X)\subset X.$$

下面的定理给出从已知开集建立新开集的另一个方法。

定理4.3 X的任意多个(有限个或无穷多个)开集的并集是X的一个开集。

为了证明，令C表示这么多个开集的全体，又令A表示它们的并集。若$x\in A$，则C中存在一个开集U包含x。因U是开集，有一个$r>0$使$N(x,\ r,\ X)\subset U$。由并集的定义，$U\subset A$，从而$N(x,\ r,\ X)\subset A$，这就证明了A是开集。

这些结果表示，对于大多数集合X，它的开集族是很庞大的。通过作邻域的并集能无止境地作成各色各样的开集。现在我们将说明许多熟知的集合，具有开集的资格。

若$X=R$，则每个邻域是一个开区间

$$N(x,\ r)=(x-r,\ x+r).$$

每个开区间是它的中点的一个邻域，因而是R的一个开集。两个或更多的开区间的并集，也是R的一个开集；例如，不相交的开区间的序列$(1/(n+1),\ 1/n)$，$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$，的并集是开集。

令 $X=R^2$. 这时候，凡圆的内部都是邻域，所以每一个圆的内部是 R^2 中的开集．令 A 表示 R^2 中的一个矩形的四条边(四条线段)上诸点的集合．它的补集 R^2-A 有两部分：内部 U 与外部 V(见图 4.2)．若 x 是 U 的一个点，并选取一个正数 r，使它比从 x 到 A 的边的最短距离还小，则 $N(x, r)$ 在 U 内．所以 U 是 R^2 中的开集．同样，外部 V 是 R^2 中的开集．但 A 在 R^2 中不是开集；因为它的一个点 z，没有邻域 $N(z, r, R^2)\subset A$. 实际上，A 的每个点都有这个性质．若用任意简单闭多边形如三角形或六边形来代替矩形 A，这些结论照样有效．

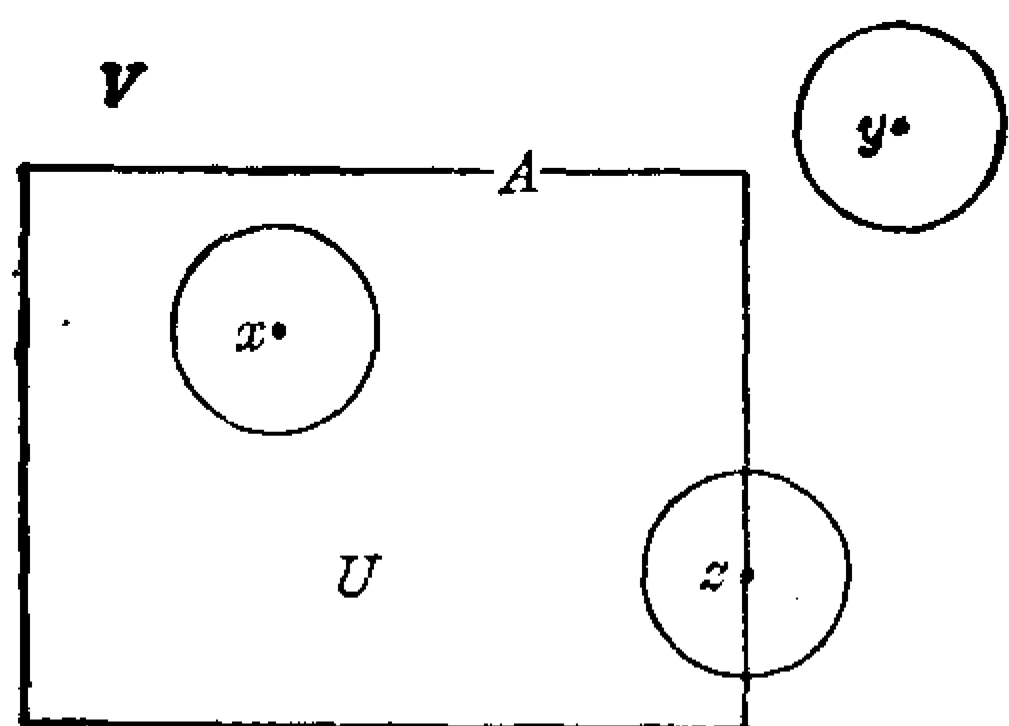


图 4.2

应该注意：开集这性质是脆弱的，即一个开集可以在添加一个点后，不再是开集．在上面的例中，若把 A 的内部 U 添加上 A 的或 A 的外部的一个点，则这扩大的集合，就不再是 R^2 的开集了．

当 $X=R^3$ 时，邻域都是球的内部，而每一个这样的集合是在 R^3 中的开集．球的外部同样是 R^3 中的开集，但球面在 R^3 中就不是开集．令 A 表示 R^3 中一个矩形盒子的面、边、与顶点的全体点，则 R^3-A 分成两个开集：盒的内部与外部．令 T 表示 R^3 中一个环面（油炸圈饼）的面上的全体点，于是 R^3-T 分成两个开集：T 的内部与外部．

在上面所举的例中，我们都取 $X=R^n$. 下面的定理告诉我们，一旦 R^n 的开集描绘清楚了，如何“看出” R^n 的一个子集 X 的开集．

定理4.4 若 $X\subset R^n$，则 X 的开集族就是 X 自身交 R^n 的全体开集的交集族[1]。

先证明：若 U 是 R^n 的一个开集，则 $X\cap U$ 是 X 的一个开集．令 $x\in X\cap U$．因 $x\in U$ 而 U 是 R^n 的开集，就有一个 $r>0$ 使 $N(x, r)\subset U$．因而

$$X\cap N(x, r)\subset X\cap U.$$

但 $N(x, r, X)=X\cap N(x, r)$，故

$$N(x, r, X)\subset X\cap U.$$

这就是说：对于每个 $x\in X\cap U$，X 中有 x 的一个邻域属于 $X\cap U$；所以 $X\cap U$ 是 X 的一个开集．这就完成了定理的证明的一半．

其次，必须证明能把 X 的一个开集 V 放大成 R^n 的一个开集 U，使 $V=X\cap U$．如果 V 原来就是一个邻域 $N(x, r, X)$，所寻找的放大体 U 显然就是 $N(x, r, R^n)$．现在，容易验证 X 的任一开集 V 是包含在 V 中的所有邻域的并集，所以我们只要寻找出那包含在 V 中的每个[形如 $N(x, r, X)$ 的][2] 邻域的放大体 [$N(x, r, R^n)$][2]，来构造所寻找的 V 的放大体．对于所有使得 $N(x, r, X)\subset V$ 的 $x\in V$ 和 $r>0$，我们定义 U 为邻域 $N(x, r, R^n)$ 全体的并集，并且证明这个 U 满足要求，即证明 U 是 R^n 的开集，与 $X\cap U=V$．因为每一个 $N(x, r, R^n)$ 是 R^n 的开集，定理 4.3 断言 U 是 R^n 的开集．证明 $X\cap U=V$ 还要用两个步骤来完成：首先要证明 V 的每一个元素是 $X\cap U$ 的一个元素，然后要证明 $X\cap U$ 的每

1) 请注意，定理 4.4 实际是说：若 $X\subset R^n$，则 X 自身与 R^n 的任一开集的交集是 X 的一个开集；而且反之，X 的每一开集是 X 自身与 R^n 的某一开集的交集．——译者注

2) 方括号里的话是译者加的．后面同．——译者注

一个元素是 V 的一个元素.

因为 V 是 X 的开集，每一点 $x\in V$ 有一 $N(x, r, X)\subset V$，所以 $x\in U$. 这证明了 $V\subset U$. 但 V 也是 X 的一个子集，所以 $V\subset X\cap U$. 这完成了第一步. 第二步要证明 $X\cap U\subset V$. 先注意到任一点 $y\in X\cap U$ 既在 X 中又在 U 中. 作为 U 的一个点，y 属于某个 $N(x, r, R^n)$ 使 $N(x, r, X)\subset V$. 因为 y 也在 X 中，它就在 $X\cap N(x, r, R^n)=N(x, r, X)$ 中，又因为 $N(x, r, X)\subset V$，从而 $y\in V$. 这就完成了 $X\cap U=V$ 的证明，并且也就完成了定理的证明.

让我们总起来看一下本节中所已做到的事. X 的一个开集 U 的主要性质是给它下定义的性质：每一个 $x\in U$ 有一个邻域 $N(x, r, X)\subset U$. 关于单独的一个开集，所能说的只是这一句话，并无其它. 我们的定理叙述了 X 的开集全族(即 X 的全体开集)的性质：开集全族的元素包括空集、X 自身、与每个邻域 $N(x, r, X)$；此外，还包括它的任意有限个元素的交集，以及任意有限个或无穷多个元素的并集.

现在转到闭集的概念.

定义 令 X 为 R^n 的一个子集. X 的子集 A 叫做 X 的一个闭集，如果 A 在 X 中的补集 $X-A$ 是 X 的一个开集. 简短地说，A 是闭集如果 $X-A$ 是开集.

引用开集的定义，就得出 A 是 X 的闭集的下列检验法：$X-A$ 的每一点有一个不与 A 相交的邻域. 例如，由单独一个点所组成的集合，总是任一稍大集合 X 中的闭集；因为，若 x 是这个单独的点，而 y 是任一别的点，若 r 小于或等于从 x 到 y 的距离，则 $N(y, r)$ 不包含 x. 同样地，一平面或空间中的一直线 L，是任一较大集合中的一个闭集；因为，若 y 不在

L 上，而 r 是从 y 到 L 的最近点的距离，则 $N(y, r)$ 与 L 不相交．

从所举的每个开集，作它的补集，就得到一个闭集的例子．在图 4.2 矩形 A 的例中，外部 V 的补集是 A 与其内部 U 的并集．因 V 是一个开集，从而 $A \cup U$ 是 R^2 的一个闭集．同样，$A \cup V$ 是 R^2 的一个闭集．因 $U \cup V$ 是开集而 A 是 $U \cup V$ 的补集，从而 A 是 R^2 的闭集．

X 中的一个集合 A 与它的补集 $X-A$ 之间的关系是互逆的：$X-A$ 的补集是 A．在 X 的子集之间的这种对应关系叫做 X 中的对偶性．开集和闭集是对偶概念，因为一个开集的对偶是一个闭集，并且反过来也对．

由于开集与闭集之间的这种对偶性，我们能从已证明的关于开集的每个定理推演出关于闭集的一个正确的"对偶"定理．在作出对偶命题时，重要的办法是利用下述事实：并集和交集在下述意义下是"对偶"运算．A 与 B 的并集的补集，是 A 的与 B 的补集的交集：

$$X-(A \cup B)=(X-A) \cap (X-B).$$

同样地，A 与 B 的交集的补集，是 A 的与 B 的补集的并集：

$$X-(A \cap B)=(X-A) \cup (X-B).$$

于是下面四个关于闭集的定理，对应于那些关于开集已证明的定理．关于两个开集的交集定理，给出对偶

定理 4.1′ 若 A 与 B 都是 X 的闭集，则它们的并集 $A \cup B$ 是 X 的一个闭集．X 的任意有限个闭集的并集是 X 的一个闭集．

要获得 $\emptyset$ 与 X 都是开集的对偶命题，只需要注意到 $\emptyset$ 与

X 在 X 中互为补集：$X-\emptyset=X$，而 $X-X=\emptyset$.

定理 4.2′ 空集 $\emptyset$ 与 X 自身这两个集合，既都是 X 的开集，又都是 X 的闭集.

X 的一个开集通常不是 X 的一个闭集，反过来也一样. 在第 7 节中将对于 X 中的、既开且闭的子集进行仔细研究.

关于任意多个开集的并集的定理，给出它的对偶

定理 4.3′ X 的任意多个（有限多个或无穷多个）闭集的交集，是 X 的一个闭集.

定理 4.4（X 的开集族是 X 自身与 R^n 的开集族的交集族）的对偶命题是

定理 4.4′ 若 $X\subset R^n$，则 X 的闭集族就是 X 自身与 R^n 的全体闭集的交集族.

设 $A\subset X\subset R^n$ 而 A 是 R^n 的闭集；则本定理断言 $A\cap X$ 是 X 的闭集. 因 $A\cap X=A$，得

推论 设 A 是 R^n 的一个闭集. 如果 R^n 的子集 X 包含 A，则 A 是 X 的一个闭集.

不要认为 R^n 的每一个子集或者是 R^n 的开集，或者是 R^n 的闭集；许多集合两者都不是. 半开区间 $(a, b]$ 在 R 中既不是开集又不是闭集. $(a, b]$ 的异于 b 的任一点 x，就有某一邻域属于这区间. 另一方面，b 的每一个邻域包含着 $(a, b]$ 外的点. 在图 4.2 的例中，内部 U 加上 A 的单独一个点，既

不是 R^2 的开集也不是它的闭集．前面提到过它不是开集．它也不是闭集，因为 A 的任一点 x 的每一个邻域 $N(x, r)$ 包含 U 的点．但是由检验一个集合为闭集的标准，它的补集的每一点必有一邻域不与它相交．

现在转到用开集概念来阐述函数的连续性．阐述的简易，已足以表明将来研究连续问题时，开集多么有用．

定理 4.5 函数 $f: X \to Y$ 连续的充分必要条件是 Y 的每个开集的原象是 X 的一个开集．等价地，f 连续的充分必要条件是 Y 的每个闭集的原象是 X 的一个闭集．

回忆第 3 节中函数 f 连续的条件：对于每个 $x \in X$ 与每个 $\epsilon > 0$，存在一个 $\delta > 0$，使 x 的 δ 邻域的 f 象属于 fx 的 ϵ 邻域．现在，定理中的条件是：对于 Y 的每个开集 V，$f^{-1}V$ 是 X 的开集．这一条件的叙述无疑地比较简单．

要证明这定理，先设 f 连续，并且 V 是 Y 的一个开集．我们必须证明：每个点 $x \in f^{-1}V$ 有一个邻域属于 $f^{-1}V$．现在 $fx \in V$，而且 V 是 Y 的开集，所以有一个数 $\epsilon > 0$ 使 $N(fx, \epsilon, Y) \subset V$．因 f 连续，存在一个数 $\delta > 0$，使 $N(x, \delta, X)$ 的 f 象在 $N(fx, \epsilon, Y)$ 中，从而在 V 中．所以 $N(x, \delta, X) \subset f^{-1}V$，而这就证明了对于 Y 的每个开集 V，$f^{-1}V$ 是开集．

为证充分性，设 f 具有性质：对于 Y 的每一个开集 V，$f^{-1}V$ 是开集；然后证明 f 连续．令 $x \in X$，并令 $\epsilon > 0$．$N(fx, \epsilon, Y)$ 是 Y 的一个开集，所以它的在 X 中的原象 $f^{-1}N(fx, \epsilon, Y)$ 是 X 的开集；记 $U = f^{-1}N(fx, \epsilon, Y)$．因 $x \in U$ 并且 U 是开集，x 有某邻域 $N(x, \delta, X) \subset U$．从而 $fN(x, \delta, X)$

$\subset N(fx, \epsilon, Y)$，这就证明了 f 连续。

已经证明定理中关于开集的部分。关于闭集的对偶部分是下列事实的结果：对于任意函数 $f: X \to Y$，Y 的一个子集 A 的原象在 X 中的补集即 A 在 Y 中的补集的原象。用符号表示，对于每个子集 $A \subset Y$，

$$X - f^{-1}A = f^{-1}(Y - A).$$

这公式的证明作为简短的练习，留给读者。让我们承认这个公式，并设 f 连续以及 A 是 Y 的闭集。从而 $Y - A$ 是 Y 的开集。由定理的第一部分，$f^{-1}(Y - A)$ 是 X 的开集。它在 X 中的补集因而是 X 的闭集。上述公式告诉我们，这个补集是 $f^{-1}A$；因而 $f^{-1}A$ 是 X 的闭集。

为着完成本定理的证明，再设每个闭集的原象是一个闭集。设 A 是 Y 的一个开集，则 $Y - A$ 是 Y 的闭集；因此 $f^{-1}(Y - A)$ 是 X 的闭集。所以它的在 X 中的补集是 X 的开集。上述公式说这补集就是 $f^{-1}A$。于是，对于每个开集 A，$f^{-1}A$ 是开集。所以 f 连续。这就完成了证明。

定理 4.6 若 $f: X \to Y$ 与 $g: Y \to Z$ 都是连续函数，则它们的复合函数 $gf: X \to Z$ 也连续。

令 W 为 Z 的一个开集。因 g 连续，前一个定理断言：$g^{-1}W$ 是 Y 的一个开集。又因 f 连续，它断言：$f^{-1}(g^{-1}W)$ 是 X 的一个开集。留给读者来证明

$$(gf)^{-1}W = f^{-1}(g^{-1}W),$$

作为简短的练习。（看习题 2.8 的答案。）于是，对于 Z 的每个开集 W 证明了 $(gf)^{-1}W$ 是开集。根据前面的定理，这就说明 gf 连续。

在后继的各节中经常用"一个空间 X"的说法．虽然毫无例外地，X 还是某个 R^n 的子集；但是，我们的观点是，只提 X 的点与 X 的开集，不问周围的空间 R^n．这叫做内蕴的观点．请读者复习本节中的定义与定理，并且注意除定理 4.4 与 4.4′ 外，所用的都是内蕴言词．在第 8 节中将讨论这个观点的重要性．

习　题

1. 若 X 只有有限个点，证明 X 的每个子集既是 X 的开集又是 X 的闭集．
2. 令 L 是 R^2 中的一条直线，并且 U 是 L 的一个开区间；求出 R^2 的一个开集 V 使 $V\cap L=U$．
3. 令 D 表示 R^2 的圆片，即 $D=\{(x, y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$．求 D 的最大的子集，并且是 R^2 的开集．
4. 举出 R^2 中一个闭集的例子，当它的一个点被删去时，它就变为开集．
5. 举出一个例子来表明：两个集合的并集的补集，不是它们的补集的并集．
6. 举出一个例子来表明：两个非开集合的并集能是开集．（提示：考虑半开区间．）
7. 若 $X\subset Y\subset R^n$，证明 X 的每一个开集是 X 自身与 Y 的某个开集 V 的交集 $X\cap V$．
8. 令 C 表示 R 的下列开区间族：

$$I_1=(-1, 1),\ I_2=\left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right),\ \cdots,$$

一般　$$I_a=\left(-\frac{1}{a},\ \frac{1}{a}\right),\quad 对于\ a=1,\ 2,\ 3,\ \cdots.$$

证明所有这些开集的交集，不是 R 的开集．

9. 举出一个映射 $f: X\rightarrow Y$ 与一个集合 $A\subset X$ 的例子，使

$Y-fA$ 与 $f(X-A)$不同.

10. 证明：对于任意函数 $f:X\to Y$，Y 的一个集合 A 的原象的在 X 中的补集，就是这集合 A 的在 Y 中的补集的原象；即

$$X-f^{-1}A=f^{-1}(Y-A).$$

11. 证明 X 的每个开集是 X 的某邻域族的并集.

5. 实数系的完全性

本节的要点是论述：存在着足够多的实数．更仔细地说，如果把实数看作是能用十进制小数(位数有限或无穷多)表示出来的数，则实数已足够完全填满我们的数直线.

数学史记载着数系不断发展的过程．首先，史前的人类用一、二、三、与多来计数．接着是正整数的无穷序列的概念，连同它们的名称与缩写的记号．其次出现分数或有理数，接着是代数方程的"根"或代数数，然后是零与负数，最后是超越数†.

在各个阶段中，某些使用到数的人，逐渐意识到他们所了解的数的概念有缺陷，已不够用．几经尝试以后，他们终于成功地创造了新的数；把新数与旧数合在一起，就弥补了那种缺陷．绝大多数人都充分地了解我们需要整数与有理数以及它们的负数与零．很好地了解到为什么这些还不够的人就少些.

Pythagoras 学派首先发现 $\sqrt{2}$ 不是一个有理数；明确地说，即没有一个分数，它的平方是 2. 这里是欧几里得的证明．用反证法，设 m/n 是一个分数，它的平方为 2. 实际能假设

† 关于数的概念的发展的详细论述，见《新数学丛书》中的第一卷，Ivan Niven 的：Numbers: Rational and Irrational.

m/n 是既约分数，就是说：m 与 n 没有不等于 1 的整数的公因数. 特别是，它们都不会同是偶数（所有的公因数 2 等都已被"消去"）. 把等式 $(m/n)^2=2$ 写成 $m^2=2n^2$，这就说明 m^2 是一个偶整数. 现在，一个奇整数的平方仍是奇数：

$$(2r+1)^2=4r^2+4r+1=2(2r^2+2r)+1.$$

因 m^2 是偶数，从而 m 是偶数，所以 $m=2k$，其中 k 是某个整数. 把 m 的这个值代入 $m^2=2n^2$ 中，变成 $4k^2=2n^2$，即 $n^2=2k^2$. 这表示 n^2 是偶数，因而 n 是偶数. 于是，m 与 n 都是偶数，与 m/n 为既约分数的事实矛盾. 这矛盾表明了不存在平方是 2 的分数.

因为 Pythagoras 学派的人都是几何学者，他们需要 $\sqrt{2}$ 这个数. 他们从长度为 d 的一线段出发，利用直尺与圆规，可以作一个边长为 d 的正方形. 由勾股定理，对角线的长应为 $\sqrt{2}\,d$.

用下面的方法来想象数系的逐步发展. 用一条直线 L 与 L 上叫做 0 与 1 的两个点开始，人们能利用圆规挨个儿标出其余的整数点 2, 3, …与 −1, −2, …. 利用另一个涉及作辅助线的作图法，能把每个区间 $[n, n+1]$ 按所要求的分成许多等份. 于是，从 0 与 1 两点开始，L 上的、坐标为有理数的点，都能作出来.

现在，在 L 上稠密地散布着有理点（稠密的意义是指：两个这样的点之间还均匀地散布着无穷多这样的点）. 容易理解人们会从而不知不觉地设想这些有理点就是 L 上的所有的点. 但是，Pythagoras 学派的人发现，边长为 1 的正方形的对角线，将它在 L 上标出时（图 5.1）所得的点 $\sqrt{2}$，却不是这些有理点中的一个. 这个发现对于发现者该是怎样一个震动呵！这促使人们创造新的数，与由这种几何作图所产生的

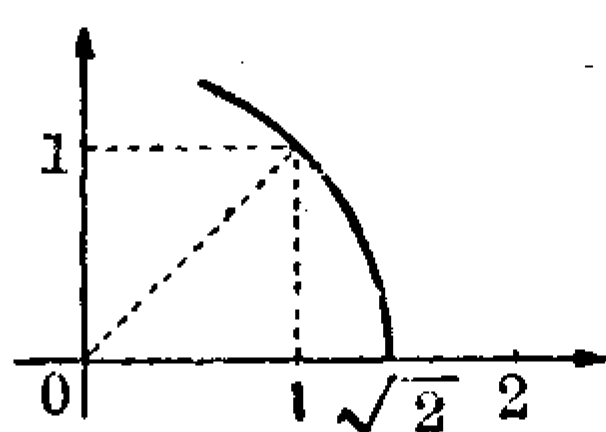


图 5.1

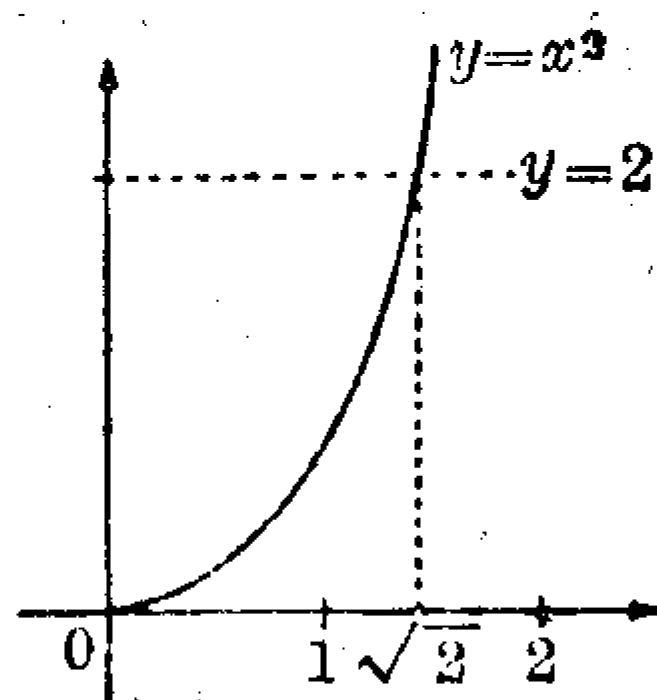


图 5.2

L 上的新点相对应.

不幸，有理数平方根的发现，仍没有给出足够的数. 三等分一个角或两倍一个立方体需要取有理数的立方根，而这些经常不是有理数的平方根. 所以数学家被迫去创造有理数的 n 次根以及甚至于更多的代数数. 代数数是整系数多项式方程的根.

约在一百年以前人们发现代数数还不够；就是说，数直线上还有点不跟代数数相对应. 特别是，曾经证明 π 这个数(一个圆的圆周与它的直径之比)不是一个代数数. 人们不禁要问：这个发展过程有没有终止的时候；如果有，什么时候结束?

十进制与数的十进小数展开的发展，赋予这些问题一个新的观点. 就已被创造出的所有的数而论，它们都能用它们的小数展开式来表示. 应该着重指出，有理数的绝大多数以及所有其它的数都有无终止的小数展开式. 在这阶段，自然地会想到把事情倒过来看；采取下述看法：任一小数展开式代表一个实数. 那就是说，可以把实数集合 R 定义为小数展开式的集合.(依惯例约定：把后面都是九的小数展开式与后面都是零的展开式看作是同一个数，例如 $3.26999\cdots=3.27000\cdots$.)这实际正是我们所要作的. 要说明这定义正确，

我们必须表明它终止了创造新数；集合 R 的数完全填满了数直线.

必须解释"填满这直线"的意义. 回忆求平方根例如 $\sqrt{2}$ 的标准方法. 从几何图形看，这是用方程 $y=x^2$ 的图象，并试着去确定它与水平线 $y=2$ 的交点的横坐标（见图5.2）. 首先检验头几个整数，看出 $1^2=1$ 太小，而 $2^2=4$ 又太大. 若 x 从一个正数递增到另一个，它的平方也随着增加. 这个事实告诉我们，$\sqrt{2}$ 在区间 $I_0=[1, 2]$ 的某一处，而它的小数展开式的整数部分是1. 其次，把区间 I_0 分成十份，并计算1.0, 1.1, 1.2, …, 1.9, 2.0 各数的平方. 找到 $(1.4)^2$ 小于2而 $(1.5)^2$ 大于2. 于是 $\sqrt{2}$ 在区间 $I_1=[1.4, 1.5]$ 中，而 $\sqrt{2}$ 的小数展开式的开头是1.4. 再把 I_1 分成十等份，检验每个分点的平方数而找到 $\sqrt{2}$ 在区间 $I_2=[1.41, 1.42]$ 之内. 这样继续下去，就确定出一个无穷区间序列 $I_0\supset I_1\supset I_2\supset\cdots\supset I_k\supset\cdots$，挤近在 $\sqrt{2}$ 处.（$\supset$ 是 $\subset$ 的反向，而"$A\supset B$"读作"A 包含 B".）每一个区间是它前一个的十分之一，而 $\sqrt{2}$ 的小数展开式能从区间的左端点的小数展开式读出来，先是1，然后是1.4，再后是1.41，等等.

设想一个类似的，但更普遍的问题. 不限于考虑 $y=x^2$ 而考虑 $y=fx$，其中 f 是任一连续函数，它随 x 的递增而递增；并且不限于找一数 x 使 $x^2=2$，而求解方程 $fx=b$，其中 b 是某个已知数. 若能找出一个起始的区间 $I_0=[n, n+1]$，使 $fn<b$ 而 $f(n+1)>b$，那就能进行一再十等分区间的步骤. 这给出一个无穷的区间序列 $I_0\supset I_1\supset I_2\supset\cdots\supset I_k\supset\cdots$. 正如找 $\sqrt{2}$ 这个数的情形一样，综合这些区间左端点的小数展开式，能得出一个数 a 的小数展开式，数 a 在每一个这种区间中，所以应该是我们的问题：$fa=b$ 的一个解. 这就强有力地提

示出如下的结论：如果我们同意每个小数展开式确定一个实数，那就有足够多的实数 a 来解出上述类型的任何问题。

现在我们来提出与证明一个定理，确切地重述前面的思想。

定义 实数闭区间的一个无穷序列 $I_0, I_1, I_2, I_3, \cdots, I_n, \cdots$ 叫做一个收缩序列，如果每个区间包含下一个区间，因而包含所有跟在后面的区间：

$$I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \cdots \supset I_n \supset \cdots.$$

一个收缩序列叫做一个正则收缩序列，若 $I_0=[m, m+1]$ 是一个整数 m 到下一个整数 $m+1$ 的闭区间，并且，对于每个 $n \geqslant 1$，I_n 是 I_{n-1} 的十等分中的一个区间．于是 I_1 是 I_0 的十分之一，I_2 是 I_1 的十分之一，照此类推．I_n 的长度是 10^{-n}。

完全性定理 每一个收缩区间序列有一个公共点；就是说，这一族所有区间的交集是非空的。

首先考虑正则收缩序列的情形．对于每个 $n=0, 1, 2, \cdots$，令 a_n 表示 I_n 的左端点；于是 $a_0=m$ 是一个整数．因 I_n 的长度是 10^{-n}，$I_n=[a_n, a_n+10^{-n}]$．把 I_{n-1} 分成十等分的点是

$$a_{n-1}, \quad a_{n-1}+\frac{1}{10^n}, \quad a_{n-1}+\frac{2}{10^n}, \quad \cdots,$$
$$a_{n-1}+\frac{9}{10^n}, \quad a_{n-1}+\frac{10}{10^n}.$$

因 I_n 是这十个子区间中的一个，它的左端点应该是

$$a_n=a_{n-1}+\frac{k_n}{10^n},$$

其中 k_n 是数字 0, 1, 2, …, 9 中的一个．按照这种方式，这区间序列决定一个整数 m 与数字的一个无穷序列 $k_1, k_2, \cdots, k_n, \cdots$．令 c 表示实数

$$c=m+\frac{k_1}{10}+\frac{k_2}{10^2}+\cdots+\frac{k_n}{10^n}+\cdots$$

(即 c 的小数展开式是 $m.k_1k_2k_3\cdots$)．因

$$a_n=m+\frac{k_1}{10}+\frac{k_2}{10^2}+\cdots+\frac{k_n}{10^n},$$

显然 $a_n\leqslant c$．现在 $a_n+\frac{1}{10^n}$ 与 c 的小数展开式在小数点后、第 n 位小数以前的数字都相同，但 c 的第 n 位小数是 k_n 而 $a_n+1/10^n$ 的第 n 位小数是 k_n+1．从而

$$a_n\leqslant c\leqslant a_n+\frac{1}{10^n}.$$

这些不等式断言 $c\in I_n$，并且因为对每个整数 n 它们都成立，从而 c 在序列的每个区间中，于是在所有区间的交集中．这就证明了序列是正则收缩序列时的定理．

现在令 $I_0, I_1, \cdots$ 是任一收缩序列；令 $I_0=[a_0, b_0]$，$I_1=[a_1, b_1]$，…，一般，$I_n=[a_n, b_n]$．于是有不等式

$$a_0\leqslant a_1\leqslant\cdots\leqslant a_n\leqslant\cdots\leqslant b_n\leqslant\cdots\leqslant b_1\leqslant b_0.$$

选取一个整数 $r\leqslant a_0$ 与一个整数 $s>b_0$，于是得一区间 $I'=[r, s]$，它包含 I_0 与所有其它的区间．用 r 与 s 之间的整数，把区间 I' 分成长为 1 的子区间．令 $I_0'=[m, m+1]$ 是这样一个子区间，它的起点 m 前面只有有限多个 a_n (收缩序列的区间的起点)，而所有的 a_n 都在它的终点 $m+1$ 前面．换句话说，那些确实包含序列的 a_n 的、I_0 的子区间中，I_0' 是最靠右的那一个．现在把 I_0' 分成十等份，而令 $I_1'=[c_1, d_1]$ 为 I_0' 的这样一个子区间，使得仅有有限多个 a_n 在 c_1 前面，而所

有的 a_n 在 d_1 前面．再把 I'_1 分成十等份，而令 $I'_2=[c_2, d_2]$ 为这样一份，使得仅有有限多个 a_n 在 c_2 前面，而所有的 a_n 在 d_2 前面．继续用这个方式以致于对每个 n，$I'_n=[c_n, d_n]$ 是 I'_{n-1} 的十分之一份，并且仅有有限多个 a_n 在 c_n 前面，而所有的 a_n 在 d_n 前面．因序列 $I'_0, I'_1, \cdots$ 正则收缩，所有这些区间有一个公共点 c．于是，对于所有 n，有 $c_n\leqslant c\leqslant d_n$．因 I'_n 的长度是 10^{-n}，有 $c_n\leqslant c\leqslant c_n+10^{-n}=d_n$，所以

$$d_n\leqslant c+10^{-n} \quad 与 \quad c-10^{-n}\leqslant c_n.$$

我们要证明：$a_n\leqslant c\leqslant b_n$ 对于每个 n 都成立．用反证法．设对于某个整数 N 有 $c<a_N$，因 10 的指数无限止地增加，我们总能找到整数 n，使

$$10^n>\frac{1}{a_N-c}.$$

在这些 n 之中，选取一个大于 N 的整数 n；对这样一个 n，有

$$a_n\geqslant a_N \quad 与 \quad 10^n>\frac{1}{a_N-c}.$$

第二个不等式能改写成 $a_N-c>10^{-n}$ 或 $a_N>c+10^{-n}$；它与第一个不等式合并，就给出 $a_n>c+10^{-n}$．因 d_n 不超过 $c+10^{-n}$，从而 $d_n<a_n$，与所有 a_n 在 d_n 前面这事实相矛盾．这个矛盾表明对于所有的 n，$a_n\leqslant c$．要证明对于所有的 n，$c\leqslant b_n$，还用反证法．设对于某个整数 N，有 $b_N<c$．然后 $c-b_N>0$，并且能选取一个大于 N 的整数 n 使

$$10^n>\frac{1}{c-b_N}.$$

然后有 $b_n\leqslant b_N$ 与 $10^{-n}<c-b_N$．合并这些就给出 $b_n<c-10^{-n}$．这个不等式与上面关于 c_n 的那一个不等式（即 $c-10^{-n}\leqslant c_n$）蕴涵着 $b_n<c_n$．因所有 a_n 在所有 b_n 的前面，这个 $b_n<c_n$ 说明所有 a_n 在 c_n 前面．这是一个矛盾，从而得 $c\leqslant b_n$ 对

于所有的 n. 这证明了 $c\in I_n$ 对于所有的 n, 完成了定理的证明.

现在我们已能确切地说明怎样用我们的完全性定理去求解本节开始时所讨论的类型的方程. 但所有这些都是第一编的主要定理(见第 1 节)的推论; 所以我们宁可继续来完成这主要定理的证明.

习　题

1. 证明 $\sqrt{3}$ 不是有理数. [提示: 证明一个整数的平方能被 3 除尽时, 该数本身也能被 3 除尽; 或等价地, 证明一个不能被 3 除尽的整数(即 $3k+1$ 或 $3k+2$ 的形式), 其平方也不能被 3 除尽.]
2. 利用每个整数分解成质因数的积的唯一性定理, 给出方程 $2n^2=m^2$ 没有整数解 (m, n) 这命题的另一个证明. (提示: 比较等式左右两边质因数 2 的个数.)
3. 利用证明 $2n^3=m^3$ 没有整数解 (借助于质因子分解的唯一性定理) 来证明 $\sqrt[3]{2}$ 不是一个有理数.
4. 证明方程 $y^2=2x^2$ 除 $(0, 0)$ 外没有 x, y 的有理数解.
5. 证明不存在整数 k, m 与 n 使得
$$[(k+m\sqrt{2})/n]^3=2.$$
6. 若 $S=a_1+a_2+a_3+\cdots$ 是一个无穷级数, 有限和
$$S_0=0,\ S_1=a_1,\ S_2=a_1+a_2,\ \cdots,\ S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n,\ \cdots$$
叫做级数的**部分和**. 说明无穷级数
$$1-\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}-\frac{1}{10^3}+\frac{1}{10^4}-\cdots+(-1)^n\frac{1}{10^n}+\cdots$$
的部分和怎样决定区间的一个正则收缩序列. 级数的和是什么?
7. 证明无穷级数
$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3}+\cdots+(-1)^n\frac{1}{2^n}+\cdots$$
的部分和怎样决定区间的一个收缩序列, 这些区间的交集是级数的和. 这个和是什么?

8. 对 12.27/3.41 作长除法，说明怎样从长除法的过程获得区间的一个正则收缩序列.

9. 利用收缩区间方法求出 $\sqrt[3]{4}$ 到小数第二位.

10. 证明每个开区间(a, b)包含一个有理数并且也包含一个无理数，其中 $a<b$. 表明全体有理数的集合 Q 在 R 中既不是闭的也不是开的.

11. 证明 Dedekind 关于实数的“切割”定理：如果 A 与 B 是 R 的两个非空子集使 $R=A\cup B$, 并且 A 的每个数小于 B 的每个数，则存在一个实数，它或者是 A 的最大数，或者是 B 的最小数.

6. 紧 致 性

如果 R^m 的一个子集 X 被包含在某个足够大的球中；也就是，如果有一个点 x_0 与一个数 $r>0$ 使 $X\subset N(x_0, r)$，我们就说 X 是**有界的**. 线段、圆、球、三角形等等都是有界集的例子. 线、半线、射线、平面、R^2 中圆的外部、全部空间 R^m 以及有理数都是无界集的例子. 直观地说，一个集合，如果沿着它能够一直走向无穷，这个集合就是无界的.

R^m 的任一子集 X，如果它既是 R^m 的闭子集又是有界子集，它就具有下述最重要而又值得注意的性质：对于任何连续映射 $f: X\to R^m$, 象集 fX 也闭而有界. 本节主要目的就是证明这个事实. 这证明有点曲折，不是那么直接；它的历史发展开始于 Cauchy(1789—1857)的工作，经历过许多阶段. 特别是，它蕴涵着 Bolzano-Weierstrass 定理与 Heine-Borel 定理这些分析学中常引用的命题.

在将要给出的证明中，我们首先要表明闭而有界这性质等价于另一个叫做“紧致”的性质. 这是论证的主要部分. 一旦这个完成了，就容易表明：只要 X 紧致而且 f 连续，fX 就

紧致．我们将通过展示无界集与非闭集的一个共同性质，来引进紧致的定义。

令 X 为 R^m 的一个无界子集，而 x_0 为 R^m 的一点．想象下面这邻域 $N(x_0, r)$ 的序列，其中 r 取 $r=1, 2, 3, \cdots$ 等值．这些邻域形成开集的一个扩张序列，其并集是整个 R^m，因为对于每一个 $x\in R^m$，其距离 $d(x, x_0)$ 小于某个足够大的整数 r．因此，交集 $X\cap N(x_0, r)$，$r=1, 2, 3, \cdots$，形成 X 的开集的一个扩张序列，它们的并集是整个 X；但 X 不等于这些开集的任一个，因为 X 无界．此外，X 不包含在任何有限个这些开集的并集之中，因为它们的并集正好是最大的那一个．

现在令 X 为 R^m 的一个有界但非闭的子集[这种 X 的一个特例是[0,1)．——译者]；则在 X 的补集 R^m-X 中有某个点 y 使得每一个邻域 $N(y, r)$ 包含 X 的点(看第4节中闭集的定义)．[并看特例 $X=[0, 1)$，从而 $y=1$．——译者]对于每个整数 $k=1, 2, 3, \cdots$，令 U_k 为以 y 为中心以 $1/k$ 为半径的圆的外部．每个 U_k 是 R^m 的一个开集，因为如果 $x\in U_k$，则 $N(x, d(x, y)-1/k)$ 是 x 的一个邻域被包含在 U_k 中．U_k 形成一个扩张的序列 $U_1\subset U_2\subset\cdots$，而且它们的并集是 y 的补集，因为对于每个点 $x\neq y$，存在着一个 k 使得 $(1/k)<d(x, y)$．从而交集 $X\cap U_k$ [在特例：$X=[0, 1)$ 与 $y=\{1\}$ 时，$X\cap U_k=[0, 1/k)$．——译者]形成 X 的开集的一个扩张序列，它们的并集是整个 X；但 X 并不等于这些集合的任一个，因为每一个 $N(y, 1/k)$ 包含 X 的点．此外，X 不在有限个这些集合的并集中，因为它们的并集正好是最大的那一个．

于是，如果 X 是无界的或非闭的，我们能在 X 中找到 X 的开集的一个扩张序列，其并集为 X；但 X 却不是其中任意有限个开集的并集．这就引导出紧致性的定义．不过首

先，我们需要“开覆盖”的定义。

定义 令 X 为 R^m 的一个子集. 如果 R^m 的一些子集的并集包含 X，这些子集所形成的族 C，叫做 X 的一个*覆盖*；就是说，X 的每一点至少在 C 的一个元素中. X 的一个覆盖 C 叫做有限的，如果 C 的元素的个数有限. X 的一个覆盖 C 叫做包含 X 的一个覆盖 D：如果 D 的每一元素也是 C 的一个元素. [D 也叫做 C 的一个子覆盖.——译者.] X 的一个覆盖叫做 X 的一个开覆盖：如果覆盖的每一元素是 X 的[注意：这里的“X 的”这两个字！——译者]一个开集. 最后，空间 X 叫做紧致的，如果 X 的每一个开覆盖包含 X 的一个有限覆盖；那就是说，能从 X 的开集的任何无穷族(其并集是 X)，挑选出一个有限的子族，其并集也是 X.

如果 X 在 R^m 中是无界的或非闭的，上面作出的开集的扩张序列是 X 的一个开覆盖. 它们的任意有限个的并集就是其中最大的那一个. 因为它们中没有一个是 X 的全部，从而它们之中任何有限个都不能覆盖住 X；因而 X 不是紧致的. 现在把已得的这些结果[即 R^m 的一个无界的或非闭的子集必然不是紧致的.——译者]，正面地叙述成下面的定理：

定理 6.1 *R^m 的每一个紧致的子集在 R^m 中是有界的并且是闭的.*

我们最终还必须证明逆定理：R^m 的每个闭的并且有界的子集是紧致的. 这是比较困难的，要分几步来完成. (目前，只有那些具有有限个点的集显然是紧致的，因为能从它的任一覆盖选取包含每个点的一个元素.)第一步，区间是第一

个但并非不重要的例子：

实数的任何一个闭区间 $I=[a, b]$ 是紧致的.

用反证法，假设 C 是 I 的一个开覆盖，而它没有有限的子覆盖成为 I 的一个覆盖，然后引出矛盾. 在这个假设下我们要作区间的一个收缩序列 $I=I_0\supset I_1\supset I_2\supset\cdots$ 使每个区间是它前一区间的一半，并且这些区间中没有一个被 C 的一个有限子覆盖所覆盖. 然后应用第5节中的完全性定理，表明这些区间中确实有一个 I_k，被包含在 C 的一个单独的元素覆盖着，这是个矛盾.

为着作收缩序列，我们注意到，根据假设，$I_0=I$ 不被 C 有限地覆盖着. I_0 的中点把 I_0 分成两个闭区间 I_0' 与 I_0''，它们的并集是 I_0. I_0', I_0'' 中至少有一个不被 C 有限地覆盖着；因为，如果不然，C 包含 I_0' 的有限子覆盖 C' 与 I_0'' 的 C''，那么 $C'\cup C''$ 会是 I_0 的有限覆盖. 选取那不被 C 有限地覆盖着的 I_0 的一半，并且叫它 I_1. (在两个一半都不被有限地覆盖着时，选取右边的一半，使选择确定.) 现在把 I_1 分成两半，并照前进行. 设 I_0, I_1, $\cdots$, I_{k-1} 已正式作好，我们象上面那样论证，因为 I_{k-1} 不曾被 C 有限地覆盖着，所以至少它的一半不被 C 有限地覆盖着. 取这一半并叫它 I_k. 这就完成了存在收缩序列的归纳证明.

由于 R 的完全性(见第5节)，存在着一个点 x 使 $x\in I_k$ 对于所有的 k. 因 $x\in I$ 并且 C 覆盖着 I，存在着开覆盖 C 的一个开集 U，使 $x\in U$. 因此，存在着一个数 $r>0$ 使 $N(x, r, I)\subset U$. 现在区间

$$I_0,\ I_1,\ \cdots,\ I_k,\ \cdots$$

包含 x 并有递减的长度

$$(b-a),\ (b-a)/2,\ \cdots,\ (b-a)/2^k,\ \cdots.$$

如果选取一个足够大的 k 使 $(b-a)/2^k<r$，那么 I_k 会完全位于 $N(x, r, I)$ 中．这里出现了矛盾：存在着一个 k 使得

$$I_k \subset N(x, r, I) \subset U,$$

所以 I_k 是被 C 的一个单独元素 U 覆盖着，可是我们序列的每一个区间又不以 C 的任何有限子覆盖为覆盖，这个矛盾表明了 I 是紧致的．

在开始下一个例子以前，需要定义 R^m 的 m 维盒子 B．设对于 $i=1, 2, \cdots, m$，有数对 $a_i<b_i$，并且限制 $x_i\in[a_i, b_i]$，即 $a_i\leqslant x_i\leqslant b_i$；$B$ 就是 R^m 中所有以这样的 $(x_1, x_2, \cdots, x_m)$ 为坐标的点 x 组成的一个子集．在 $m=1$ 时，B 正好是一个闭区间．当 $m=2$ 时，B 是一个边与坐标轴平行的长方形以及它的内部．当 $m=3$ 时，B 是一个面与坐标平面平行的长方盒子以及它的内部．

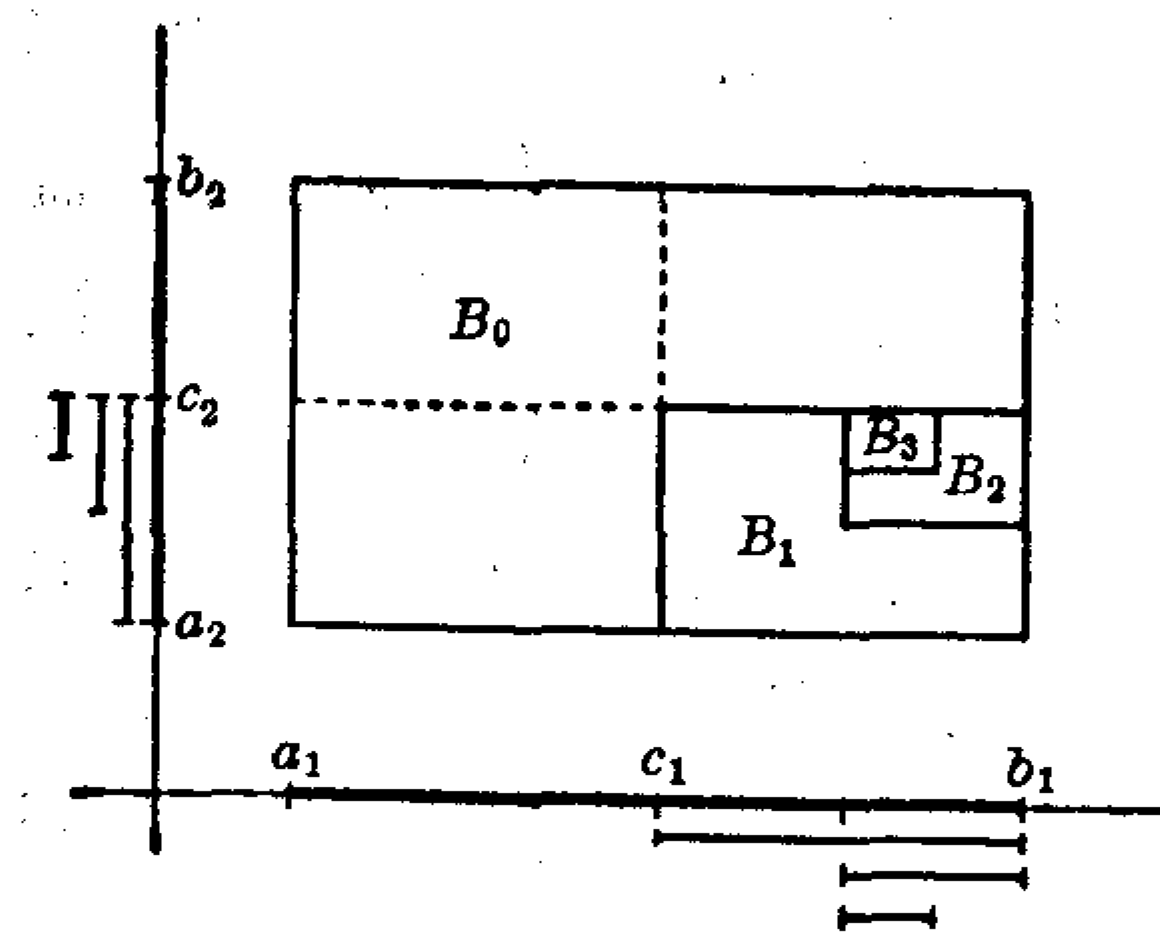


图 6.1

我们也需要能将这盒子 B 再分成较小的盒子．这可以这样做：把区间 $[a_i, b_i]$，$i=1, 2, \cdots, m$，的每一个用它的中点 c_i 分成两个区间；所分成的每个盒子以 $[a_i, c_i]$ 或 $[c_i, b_i]$ 作为它的第 i 个区间．于是，当 $m=2$ 时长方形被直线 $x_1=c_1$ 与 $x_2=c_2$ 分成 $4=2^2$ 个全等长方形，它的各边长是 B 的对应边长的一半（见图 6.1）．当 $m=3$ 时盒子被三个平面 $x_1=c_1$，$x_2=c_2$ 与 $x_3=c_3$ 分成 $8=2^3$ 个全等的盒子，它的各条棱长是 B 的对应棱长的一半．一般，B 被 m 个超平面 $x_i=c_i(i=1, 2, \cdots, m)$ 分成 2^m 个全等的盒子，它的各条棱长是 B 的相应棱长的一半．

任何 m 维盒子 B 是紧致的。

这里的证明将类似于证明一维盒子(区间)时的方式，用反证法。假设 C 是 B 的一个开覆盖，而它没有有限的子覆盖成为 B 的覆盖。我们来作盒子的一个收缩序列 B_0, B_1, …, B_k, … 使得 $B_0=B$，其中没有一个被 C 有限地覆盖着，并且对于每一个 $k>0$，B_k 是 B_{k-1} 所分成 2^m 个盒子中的一个。由假设，$B_0=B$ 不被 C 有限地覆盖着。从此开始我们序列的归纳作法。假设 B_0, B_1, …, B_{k-1} 已妥当地选定，考虑 B_{k-1} 所分成的 2^m 个盒子。如果每一个会被 C 的一个有限的子覆盖覆盖着，那么这些 2^m 个子覆盖将会合并为 C 的一个有限的子覆盖，它成为 B_{k-1} 的一个覆盖。因为这不可能，B_{k-1} 的这些子盒中至少有一个不被 C 有限地覆盖着。取 B_k 是这样一个盒子。这就完成了存在着序列 B_0, B_1, …, B_k, … 的归纳证明。(图 6.1 说明 $m=2$ 时的头三步.)

我们断言：对于每个 $k=1, 2, \cdots$，存在着一点 $x\in B_k$。为了说明这个，考虑盒序列在第 i 坐标轴上的投影，其中 $i=1, 2, \cdots, m$。在每个轴上的投影组成区间的一个收缩序列。令 x_i 为在第 i 坐标轴上由投影形成的所有区间的一个共同的数。于是，对于所有的 k，R^m 中坐标是 $(x_1, x_2, \cdots, x_m)$ 的点 x 是 B_k 的一个点。因为 $x\in B$，存在着覆盖 C 的一个开集 U 使得 $x\in U$。因而有一个数 $r>0$ 使得 $N(x, r, B)\subset U$。令 d 表示 B 的最长棱边的长度。因为在作序列的每一步骤中所有的棱都被平分，从而 B_k 的最长棱的长度是 $d/2^k$。由勾股定理，B_k 的对角线长度最多是 $\sqrt{m}d/2^k$。取一个足够大的整数 k，使

$$2^k>\frac{\sqrt{m}d}{r};\quad 于是\quad \frac{\sqrt{m}d}{2^k}<r,$$

从而有 $$B_k \subset N(x, r, B) \subset U;$$
因此 B_k 被包含在 C 的一个元素中，而这与 B_k 不为 C 有限地覆盖着这一事实相矛盾．我们的假设 B 是不紧致的已经引到一个矛盾；所以 B 是紧致的．

利用下面这一有用的命题，可将能被证明为紧致的集的族大为扩大．

定理 6.2 如果 X 是一个紧致空间[即 R^n 的紧子集．——译者] B 的一个闭子集，则 X 是紧致的．

为证明这定理，取 X 的任一开覆盖 C，并扩大 C 的每个元素使得扩大的元素组成 B 的一个开覆盖 C'．然后，利用 B 的紧致性从 C' 挑选一有限的子覆盖，并且看出那相应的未扩大的元素组成所寻找的 X 的有限的覆盖．

对于 X 的开覆盖 C 的每一个元素 U，令 $U' = U \cup (B - X)$，又令 C' 表示以这些较大的 U' 为元素的族．首先我们要表明 U' 是 B 的一个开集．一点 $x \in U'$，或在 U 中或在 $B - X$ 中．如果 $x \in B - X$，X 在 B 中是闭集的假设告诉我们：存在着一个 $r > 0$ 使得 $N(x, r, B) \subset (B - X) \subset U'$．如果 $x \in U$，在 X 中 U 是开集这事实意味着存在一个 $r > 0$ 使得 $N(x, r, X) \subset U$，因此 $N(x, r, B) \subset U \cup (B - X) = U'$．这就证明了 U' 在 B 中是开集．

现在令 y 为 B 的任一点；或 $y \in X$，或 $y \in B - X$．如果 $y \in X$，则对于某个 $U \in C$，$y \in U$，从而对于相应的 $U' \in C'$，$y \in U'$．如果 $y \in B - X$，则对于所有的 $U' \in C'$，有 $y \in U'$．所以 C' 是 B 的一个开覆盖．因为 B 是紧致的，C' 的有限个元素，譬如 $U'_1, U'_2, \cdots, U'_k$，覆盖 B，因此也覆盖 X．从而 C

的相应元素，即 U_1, U_2, $\cdots$, U_k, 组成 X 的一个有限覆盖；对于被 U'_j 覆盖着的 X 的每一个点也被 U_j 覆盖着．这就完成了定理的证明．

把闭的并且有界的集合放在一个 m 维盒子（它已被证明是紧致的）中，然后运用定理 6.2，就能证明定理 6.1 的逆定理．

定理 6.3 R^m 的每个闭的并且有界的子集是紧致的．

令 X 在 R^m 中为闭且有界．因 X 有界，就有一个点 $b \in R^m$ 与一个数 $r > 0$ 使得 $X \subset N(b, r)$．令 B 表示中心在 b 且所有棱的长都等于 $2r$ 的 m 维盒子；确切地说，如果 R^m 中一点 y 的坐标 $(y_1, \cdots, y_m)$ 满足

$$b_i - r \leqslant y_i \leqslant b_i + r, \quad i = 1, \cdots, m,$$

y 就在 B 中．于是 B 包含 $N(b, r)$，所以 $B \supset X$；因此 $X \cap B = X$．而且 X 是 B 的闭集；因 X 是 R^m 的闭集，根据定理 4.4′，B 的闭集族就是 B 自身与 R^m 的闭集族的交集族．X 是紧致的这所求的结论，现在是前面定理的一个推论．

对于 R^m 的子集，紧致的性质等价于既闭而且有界的性质；现在已完全证明了．这就已准备好来证明本节的主要命题：

定理 6.4 如果 X 是一个紧致空间，并且 $f: X \to Y$ 是连续的，则象 fX 是紧致的．

证明 令 O 为 fX 的一个开覆盖．我们需要表明 O 包

含 fX 的一有限覆盖．对于每个 $U\in C$，考虑原象 $f^{-1}U$，又令 C' 为全体这些原象所形成的族．因为 f 连续并且 U 是 fX 的一个开集，每个原象 $f^{-1}U$ 是 X 的一个开集．对于每个 $x\in X$，fx 在某个 $U\in C$ 中，因为 C 覆盖 fX；所以 x 在对应的 $f^{-1}U$ 中．于是 C' 是 X 的一个开覆盖．因 X 是紧致的，存在着 C' 的一有限子族 D' 覆盖着 X．C 的对应子族 D 是有限的并且覆盖着 fX；因为，如果 $x\in f^{-1}U$ 并且 $f^{-1}U$ 在 D' 中，那么 $fx\in U$，这里 U 在 D 中．于是 C 包含 fX 的一有限覆盖．这就完成了 fX 是紧致的证明．

下面是定理 6.4 的直接推论．

推论 如果 X 是 R^m 的一个闭的并且有界的集合，又如果 $f: X\to R^m$ 连续，则 fX 是 R^m 的一个闭的并且有界的集合．

要把前面的工作联系上第一编的主要目的（证明第 1 节的定理），我们必须证明直线上的紧致集合的一个重要性质．

定理 6.5 实数的一个紧致的非空集合 X 有一极大值与一极小值；就是说，X 中存在着数 m 与 M，使得 m 是 X 中的最小数，M 是 X 中的最大数．

为着深刻理解这结论的威力，先看一些例子．首先，全体实数集合 R 没有最大数与最小数．实际上，数的任意无界集 Y 一定不会有一个极大值或一个极小值；因为如果两个它都有，那么任意兼有这极大值与这极小值的开区间会包含 Y 的全部，于是 Y 将会是有界的．其次，还存在着既无一个极大值也无一个极小值的有界集．例如一个开区间 (a, b) 就是既没有一个最大数也没有一个最小数．这些例子表明：要获得

定理的结论，我们必须既要求 X 是有界的，并且还必须增加某些不为开区间所满足的额外条件．因为一个紧致的集合是既闭并且有界，单单这紧致性的条件就保证了有界，并且排斥了开区间．

让我们继续证明定理．因为 X 是紧致的，它就有界；因而存在着一个包含 X 的闭区间 $I_0=[a_0, b_0]$．我们来造一个具有下列性质的区间的收缩序列 $I_0, I_1, \cdots, I_k, \cdots$：每个区间 I_k 是 I_{k-1} 的一半；每个 I_k 至少包含 X 的一个点；最后，I_k 的右端点 b_k 是 X 的一个上界，就是说，对于所有的 $x\in X$，我们有 $x\leqslant b_k$，$k=0, 1, 2, \cdots$．毫无疑问 I_0 含有 X 的一个点（因 X 是非空的），并且 b_0 是 X 的一个上界．假定已妥当地选取了 $I_0, I_1, \cdots, I_{k-1}$．令 c 为 $I_{k-1}=[a_{k-1}, b_{k-1}]$ 的中点．如果 c 是 X 的一个上界，取 $I_k=[a_{k-1}, c]$，如果 c 不是一个上界，取 $I_k=[c, b_{k-1}]$．在两种情形的任一种时，I_k 都具有所要求的性质．

由于 R 的完全性（见第 5 节），存在着一个数 M，使得对于每个 $k=0, 1, 2, \cdots$，有 $M\in I_k$．我们将首先证明 M 属于 X．设不然．因 X 是闭集，补集 $R-X$ 就是开集；于是会有一个 $r>0$ 使得 $N(M, r)\subset R-X$．如果 d 表示 I_0 的长度，则 I_k 的长度是 $d/2^k$．对于一个充分大的整数 k，我们有 $d/2^k<r$，所以 I_k 包含 M 并且它的长度小于 r；因而

$$I_k\subset N(M, r)\subset R-X.$$

这与每个 I_k 含有 X 的一个点的事实相矛盾．从而 M 必须属于 X．

现在我们证明：M 是 X 的最大数．假设不然，就会有一个 $x\in X$ 使得 $x>M$．取 $r=x-M$，因而 $r>0$，选取一个整数 k，使其数值足能使 $d/2^k<r$．因为 $M\in I_k$ 并且 I_k 的长

度小于 r，从而 $b_k<x$；所以 b_k 不是 X 的上界。但在造区间时 b_k 是一个上界。这个矛盾证明了 M 是 X 的最大数。

存在着极小值的证明同样地进行。区间的收缩序列是这样选取的，使每个区间包含 X 的某个点，并且每个区间的左端点是 X 的下界。证明的细节留给读者。运用由 $fx=-x$ 所定义的映射 f: $R\to R$，从极大值的存在也能得出极小值的存在。因为 X 是紧致的，定理 6.4 断言 fX 是紧致的。然后 fX 有一极大值，譬如 M'。从而 fM' 是所求的 X 的极小值。

本节最后的定理提供了第 1 节中主要定理的部分结论。

定理 6.6 如果 X 是 R^m 的一个闭的、有界的非空子集，又如果 f: $X\to R$ 是定义在 X 上的一个连续的实值函数，则象 fX 有一极大值 M 与一极小值 m。

因 X 既闭并且有界，它就是紧致的。因 X 是紧致的并且 f 连续，象 fX 就是紧致的。因 fX 是紧致的又是实数的非空集合，前面的定理保证了 m 与 M 的存在。这就完成了证明。

习　题

1. 证明一个有界集的任何子集必有界。
2. 证明两个有界集的并集有界，并证明有限个有界集的并集有界。
3. 找出一个无穷序列，其元素都是有界集，但元素的并集是无界集。
4. 找出半开区间 $X=[a, b)$ 的开子集 $U_1, U_2, \cdots, U_k, \cdots$ 的一个扩张序列，这些开子集的并集是 X，但它们中没有一个是 X 的全部。

5. 令 D 为 R^2 中的、以 x_0 为中心、以 1 为半径的圆片；即

$$D=\{x\in R^2\,|\,d(x,\ x_0)\leqslant 1\}.$$

把前一习题中的 $X=[a,\ b)$ 改成 $X=D-x_0$，求解这改后的习题. 再把 $X=[a,\ b)$ 改成 $X=D-y_0$，这里的 y_0 使 $d(y_0,\ x_0)=1$，求解这改后的习题.

6. 令 X 为闭区间 $[0,\ 10]\subset R$. 说明 R 中长为 1 的全体开区间形成 X 的一个覆盖 C，找出 C 的一个有限的子族，使它是 X 的一个覆盖. X 的一个覆盖中至少有多少个这样的区间？

7. 令 C_r 表示 R^2 中以 x_0 为中心、以 r 为半径的圆. 对于单位圆上的各点 c，即 $c\in C_1$，令 T_c 为 C_1 的、过 c 的切线. 于是 R^2-T_c 分成两个开的半平面；令 U_c 为不包含 x_0 的那一个. 证明对于所有的 $c\in C_1$，这些半平面 U_c 的族 C 覆盖 C_1 的外部. 如果 $r>1$，为什么一定有 C 的一个有限的子族覆盖 C_r？对于 $r>2$，证明 C_r 能被 C 的三个元素覆盖着，而不是两个. 对于使 $\sqrt{2}<r\leqslant 2$ 的 r，证明 C_r 能被 C 的 4 个元素覆盖着，而不是 3 个. 对于使 $2/\sqrt{3}<r\leqslant\sqrt{2}$ 的 r，证明 C_r 能被 C 的 6 个元素覆盖着，而不是 4 个. 介于 C_1 与 C_2 之间的、开的、平环域能否被 C 的有限的子族覆盖着？（一个平环是介于两个同心圆之间的环.）

8. 证明两个紧致集合的并集是一个紧致的集合. 同样，任何有限个紧致的集合的并集是紧致的.

9. 举例说明，无穷多个紧致集合的并集可以不是紧致的.

10. 证明：如果 X 是紧致的并且 $X\subset Y$，则 X 是 Y 中的闭集.

11. 找出有理数集 Q 的这样一个有界子集 X，它是 Q 中的闭集，但 X 却不包含一个极大值也不包含一个极小值.

12. 说明对于每个正整数 n，存在着从区间 $I=[-1,\ 1]$ 到区间 $[-n,\ n]$ 的一个连续满映射. 是否存在着从 I 到整个实数直线 R 的一个连续满映射？构造从开区间 $(-1,\ 1)$ 到整个直线 R 的一个连续满映射.

13. 证明 R^m 的一个子集 X 是紧致的，当且仅当 X 的由 R^m 的开集组成的每一个覆盖包含一个有限覆盖.

7. 连 通 性

为了证明第一编的主要定理，我们需要闭区间的两个重要拓扑性质。这两个的第一个，紧致性，已在第6节中研究了。现在讨论另一个叫做“连通性”的性质。

有些空间能自然地分成两部分或更多的部分。例如，两不相交直线所组成的空间能分成两条直线。作为另一个例子，平面中圆的补集有两部分：圆的内部与圆的外部。再者，如果 p 是直线 L 的一点，那么 L 中 p 的补集自然是由 p 决定的两个半直线(p 的挖去把 L 切割成两部分)。

在上面所举的每一个例中，恰出现一种自然的分法。有理数集合 Q 能有许多种分法。每一个无理数 x 产生 Q 的一种分法：大于 x 的那些有理数的部分与小于 x 的那些有理数的部分。无理数集合能被每一个有理数用同样方法分开。

另一方面，某些集合不能以任何自然方式分成一些部分，这是真的，例如，一直线、一线段、一平面与一圆片。

当然强行分成几份是可能的。例如，如果 I 是区间 $[a, b]$ 并且如果 c 是一个数使得 $a<c<b$，则 c 把 I 分成两个区间 $[a, c]$ 与 $[c, b]$。不过，因它们都有共同的 c，我们不把这种分法看成一种妥当的分法。从这两个分开的集合之一删去 c，譬如说从第二个删去 c，我们就获得一个妥当的分法。令 $A=[a, c]$ 与 $B=(c, b]$；则 $A\cup B=I$ 与 $A\cap B=\emptyset$。我们不认为 I 的这种分法或“分裂”是自然的。因为集合 B 在点 c 处“接触”到集合 A。如果我们也从 A 删去 c 来避免这个“接触性”，那么 $A\cup B\neq I$，而 $A\cup B$ 是 I 中 c 的补集；因而这个例子类似于直线 L 中一点 p 的补集的例子。

我们需要的正确概念，现在叙述于下：

定义 空间 X 的一个分离是 X 的一对非空子集 A 与 B，使 $A\cup B=X$，$A\cap B=\emptyset$，并且 A 与 B 都是 X 的开集．没有分离的空间叫做连通的．

例如，考虑平面中一个圆 C 的补集 X．令 A 为圆的内部，B 为圆的外部；就是说，A 包含与圆心距离小于圆半径的所有点，而 B 是 X 中 A 的补集．一个分离的条件易于验证．X 中 A 与 B 都是开集这一事实，从图 7.1 中是显而易见的；A 的每一点有包含在 A 中的一邻域，而 B 的每一点有包含在 B 中的一邻域．

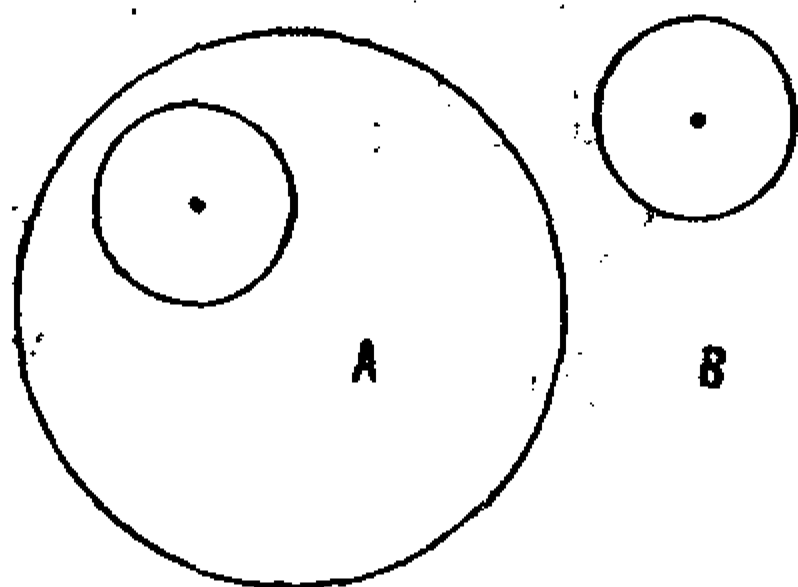


图 7.1

令 L 为一直线，p 为 L 的一点，而 X 为 L 中 p 的补集．令 A 为 L 上位于 p 左边的点的集合（看图 7.2），B 为 L 上位于 p 右边的点的集合．此外 A 的每个点有一邻域在 A 中，同样，B 的每个点有一邻域在 B 中．

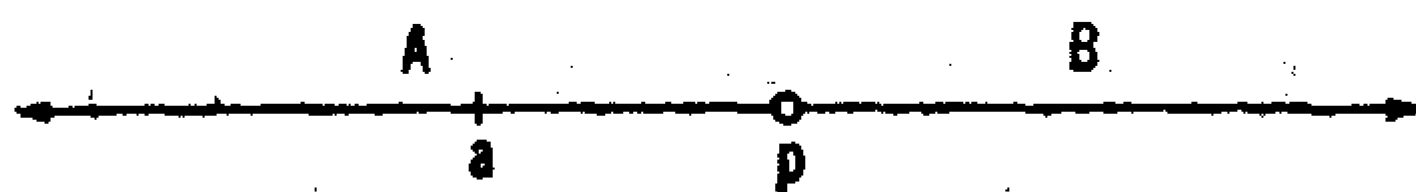


图 7.2

现在回忆区间 $I=[a, b]$ 的"强行"分为 $A=[a, c]$ 与 $B=(c, b]$ 的分隔．如果用分离的三个条件来检验，我们发现除下面一个外都满足．A 在 I 中不是开集，因为点 $c\in A$ 没有邻域完全在 A 中．

这些预备性的考虑说明，分离的定义与连通空间的定义精确地表达出我们心目中粗糙的几何概念，后面的定理将完

全验证这些定义的合理性。

分离的定义能改用若干等价的提法。因为 A 与 B 在 X 中互为补集，一个是开集当且仅当另一个是闭集。于是能同样地要求 A 与 B 都是 X 中的闭集。我们也可以不管 B，而说 X 的一个分离是 X 的一个子集 A，它既是 X 的一个开集又是 X 的一个闭集，并且它既不是空集又不是 X。从而它在 X 中的补集 B 有同样性质。(记住，$\emptyset$ 与 X 在 X 中都既是开的又是闭的。)

这样，下面的任何一个都可以作为空间 X 的一个分离 A 与 B 的定义：

1. A 与 B 都是 X 的非空子集使得 $A\cup B=X$, $A\cap B=\emptyset$, 并且 A 与 B 在 X 中都是开的；

2. A 与 B 都是 X 的非空子集使得 $A\cup B=X$, $A\cap B=\emptyset$, 并且 A 与 B 在 X 中都是闭的；

3. A 是 X 的一个子集，它既是 X 的一个开集又是 X 的一个闭集，并且它既不是 $\emptyset$ 也不是 X。

证明一个空间不连通，往往比证明它连通容易。在第一种情形，我们只需要举出一个分离，并且验证它确是一个分离，而在第二种情形，则必须顾到 X 的除 $\emptyset$ 与 X 以外的所有开集，即证明每一个这样的开集不是 X 中的闭集。下列定理不仅证明某些简单的空间是连通的，并且也提供了验证许多空间连通性的技巧。

定理 7.1 实数的一个闭区间是一个连通集。

令 I 为 R 的一个闭区间，又令 A 为 I 的一个闭区间，A 既不是 $\emptyset$ 又不是 I。为了证明这定理，我们将证明 A 在 I 中

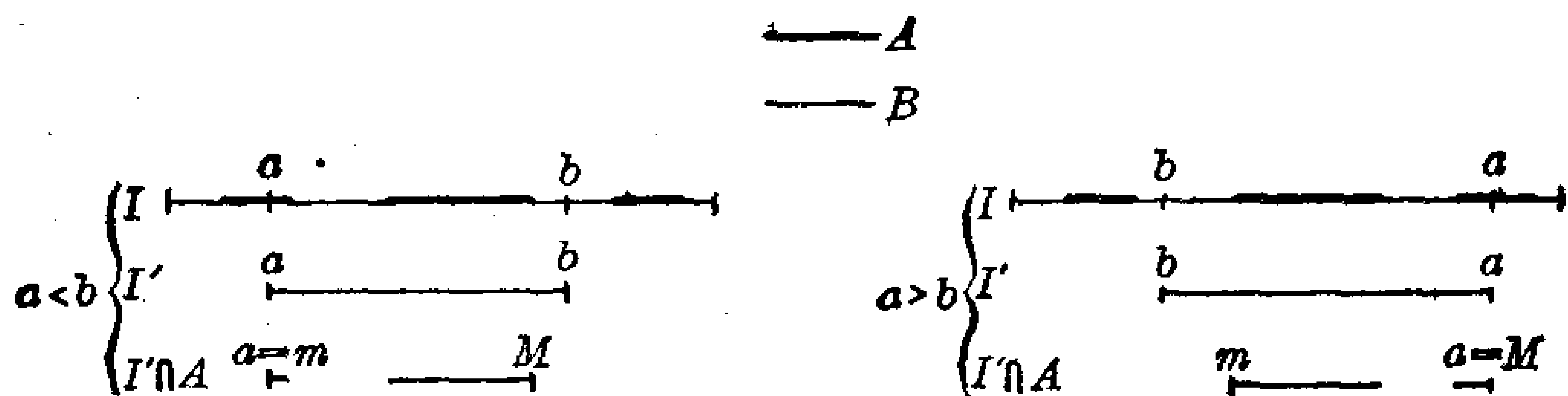


图 7.3

不是开的. 因 $A\neq\emptyset$ 又 $A\neq I$, 就有一个点 $a\in A$ 与一个点 $b\in I-A$. 令 I' 表示区间 $[a, b]$ (或 $[b, a]$, 如果 $b<a$). 为了画出这个, 想象区间 I 由图 7.3 所示的子集 A 与 B 组成, 其中 A 是闭集而 B 是 A 在 I 中的补集. 因 A 与 I' 都是闭集, 所以它们的交集 $A\cap I'$ 是闭集. 因 $A\cap I'$ 又有界, 它是一个紧致的集合. 由定理 6.5, $A\cap I'$ 有一极小值 m 与一极大值 M. 如果 $a<b$, 则 $m=a$, 因 a 是 I' 的左端点. 因右端点 b 不在 A 中, 我们有 $m=a\leqslant M<b$. 从而 M 的每个邻域包含介于 M 与 b 之间的数; 这些都不在 A 中, 因此 A 不是开的. 如果 $a>b$, 则 $M=a$, $b<m\leqslant a$, 并且 m 的每个邻域包含介于 b 与 m 之间的数; 这些都不在 A 中, 所以 A 仍不是开的. 这就证明了 I 的唯一的既开又闭的子集是 I 与 $\emptyset$. 所以 I 是连通的.

定理 7.2 如果 $f: X\to Y$ 是一个连续映射, 并且 A 与 B 是象 fX 的一个分离, 则原象 $A'=f^{-1}A$ 与 $B'=f^{-1}B$ 形成 X 的一个分离.

我们必须验证 A' 与 B' 这对集合满足一个分离的各个条件. 因为 A 不是空的, 就有一个点 $y\in A$. 因为 $A\subset fX$, 就有一个 $x\in X$ 使 $fx=y$; 所以 $x\in A'$, 因而 A' 不是空的. 同样,

B' 不是空的. 任意点 $x\in X$ 有它的象在 $fX=A\cup B$ 中, 所以 $fx\in A$ 或 $fx\in B$. 相应地, $x\in A'$ 或 $x\in B'$. 这表明 $X=A'\cup B'$. 如果 A' 与 B' 有一公共点 x, 那就蕴涵 fx 是 A 与 B 的公共点. 这是不可能的, 所以 $A'\cap B'=\emptyset$. 最后, 因为 A 与 B 在 fX 中是开的并且 f 是连续的, 它们的原象在 X 中是开的(见定理 4.5). 这证明了 A', B' 是 X 的一个分离.

这定理能再说得简短些: 如果 f 连续并且 fX 不连通, 则 X 不连通. 因此一个等价的断言是:

推论 如果 $f:X\to Y$ 是连续的并且 X 是连通的, 则 fX 是连通的.

这一提法是对我们最有用的一种; 例如, 它使我们能证明:

推论 每一条线段是一个连通集.

证明 如果 L 是一条线段, I 是一个区间, 就有一个相似变换 $f:I\to L$, 使得 $fI=L$. 因为相似变换是连续的(见第 3 节)并且 I 是连通的, 因此 L 连通.

两条相交于一点的线段合起来, 形成一个连通集; 这在直观上是显然的. 它的证明依赖于下面两个引理.

引理 7.3 如果 X 是不连通的并且 A 与 B 是 X 的一个分离, 则 X 的每一个连通子集或者完全在 A 中, 或者完全在 B 中.

设 C 是 X 的一个子集, 它包含 A 的一点与 B 的一点. 则 $C\cap A$ 与 $C\cap B$ 都不是空集, 都是 C 的一个开集; 它们的并集是 C 而它们的交集是空的. 所以 C 是不连通的. 这就证

明：一个连通子集不能同时包含 A 与 B 的点。

引理 7.4 如果两个连通集合 Z 与 W 有一个公共点，则 $Z\cup W$ 连通。

用反证法. 设 $Z\cup W$ 有一个分离 A, B. 令 c 为 Z 与 W 的公共点. 如 $c\in A$, 则 Z 与 W 都是包含 A 的一个点的连通集. 根据引理 7.3(连同 $X=Z\cup W$), Z 与 W 完全在 A 中. 故 B 必为空的. 如 $c\in B$, 我们看出 Z 与 W 完全在 B 中，于是 $A=\emptyset$. 这两种情况的任一种，都出现矛盾；所以 $Z\cup W$ 是连通的。

引理 7.4 的一个简单应用表明：两条相交于一点的线段合起来形成一个连通集；在这相交的两线段上，逐次接上另一条线段，就作成一条折线，所以每一条折线是一个连通集。

下一个定理是证明某些空间具有连通性的重要工具。

定理 7.5 一空间 X 是连通的 $\Leftrightarrow X$ 的每一对点位于 X 的某个连通子集中。

定理的"$\Rightarrow$"这部分的证明是明显、平凡的. 因为整个 X 当然是它自身的一个连通子集，并且包含 X 的每一对点. 从而 X 自身就是结论中的"某一连通子集"。

为着用反证法来证明定理的"$\Leftarrow$"这另一半，假设 X 有这样的性质：它的每一对点位于 X 的一连通子集中，并设 X 不连通. 令 A 与 B 为 X 的一个分离，又令 $x\in A$, $y\in B$(记住 A 与 B 都不是空集). 由假设，在 X 中存在着包含 x 与 y 的一个连通子集 C. 但是根据引理 7.3, C 或者完全在 A 中，或者完全在 B 中. 这个矛盾指出 X 不能有分离. 所以 X 是

连通的，定理得证.

记住 R^n 的一个子集叫做凸的，如果它包含它的每一对点的连接线段(例如，平面中一个圆的内部是凸的，而它的外部不是). 因为线段是连通的，定理 7.5 蕴涵着

推论 每一个凸集是连通的.

一个连通集不一定是凸集. 尽管一个圆的外部不是凸集，但它却是连通的，因为它的任何两点都可以用位于外部的一条折线连接起来(见图 7.4). 同样，介于两圆之间的一个平环的任两点可用一条折线连结；因此，一个平环是连通的.

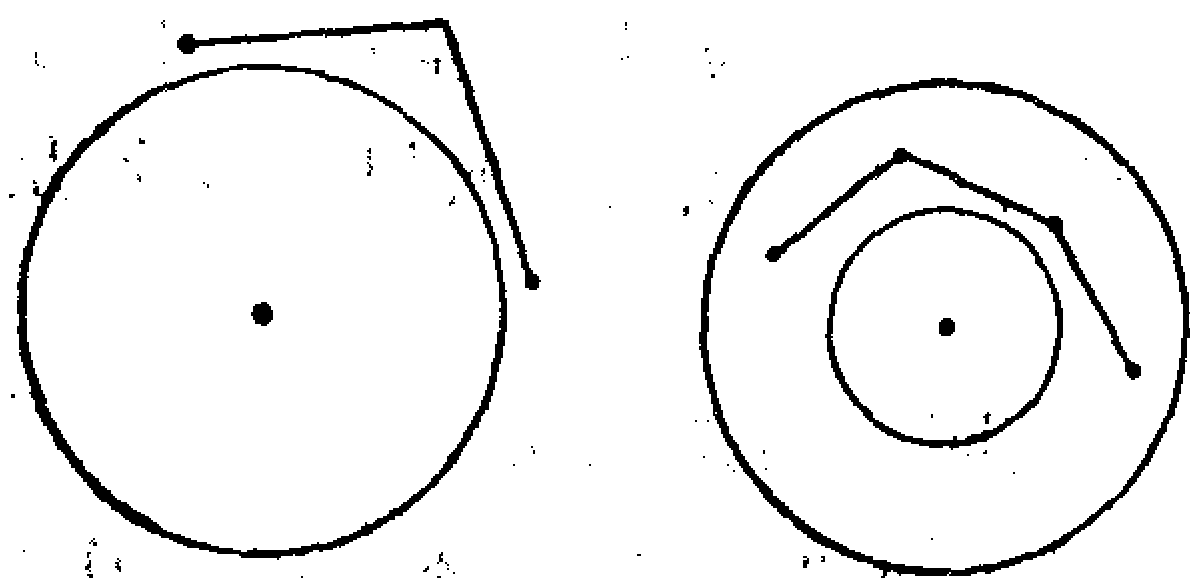


图 7.4

现在我们回转来研究直线的子集(即实数的子集)，得到关于连通性的最后命题.

定理 7.6 实数的一个紧致、连通集合是一个闭区间.

本定理的逆定理，即一闭区间既紧致又连通，已经证明过了(见第 6 节与定理 7.1).

证明 令 X 为实数的任一连通集，又令 a 与 b 为 X 中的数，并且 $a<b$. 先证明任何适合 $a<c<b$ 的数 c 也在 X 中. 这一点 c 决定它在 R 中的补集 $R-c$ 的一个分离；令 A 包含所有小于 c 的数，又令 B 包含所有大于 c 的数. 如果，同我们所要证明的相反，X 不包含 c，它就会是 $A\cup B$ 的一子集，又因 X 是连通的，根据引理 7.3，它将完全在 A 中或完

全在 B 中. 但 X 包含 a 与 b, 所以这不可能. 于是我们证明了实数的一连通集包含它的任何两数之间的所有数.

如果 X 还是紧致的, 定理6.5断言: X 有一极小值 m 与一极大值 M. 从而 X 的确是这闭区间$[m, M]$.

习 题

1. 指出下列每一个集合是否连通; 如不连通, 求出一个分离.
   (a) 一个圆挖去了一点; 挖去了两点.
   (b) 一个圆的一段弧; 一段弧挖去了它的中点.
   (c) 有限点集; 由一个点形成的独点集; 空集.
   (d) 环面(见图7.5)
      (i) 挖去了圆 P;
      (ii) 挖去了圆 Q;
      (iii) 挖去了圆 P 与圆 Q;
      (iv) 挖去了闭曲线 R;
      (v) 挖去了 P 这种类型的两个圆;
      (vi) 挖去了 Q 这种类型的两个圆;
      (vii) 连同它的内部, 但挖去了 P 型的两个圆.
   (e) 平面中无公共点的两个圆的并集; 无公共点的两个圆的交集.
   (f) 令 A, B, C, D 为圆上四点, 依次把圆等分成四段相等的弧. 令 AB 表示从 A 到 B 的、包含两端点的最短弧, 等等. 回答以下集合的问题:
      (i) $AB \cup BC$;
      (ii) $AB \cap BC$;
      (iii) $AB \cup CD$;
      (iv) $AB \cap CD$;
      (v) $ABC \cup CDA$.

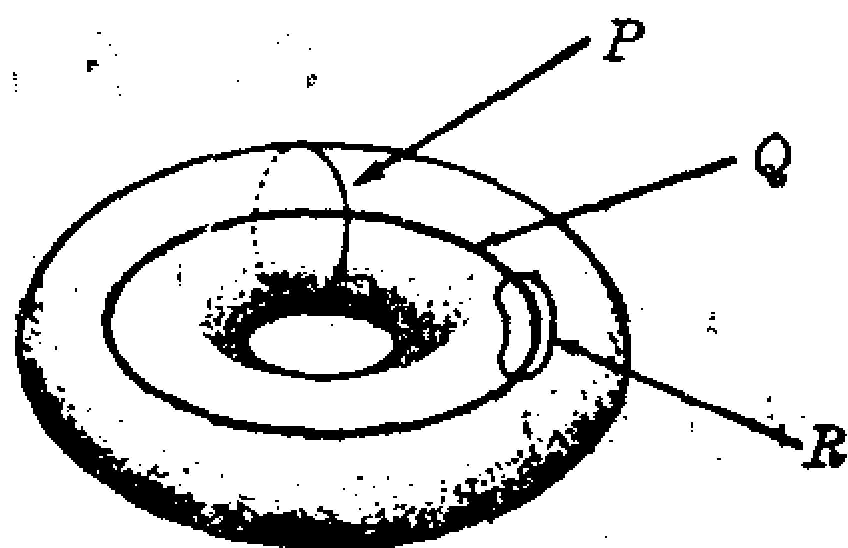


图 7.5

2. R^m 的一个子集 D 叫做关于一点 p 的星形, 如果, 对于每个点 $x \in D$, 从 p 到 x 的线段都在 D 中.

证明这样一个集合是连通的.

3. 说明下面的每一个是连通的: 球的表面; 球的内部; 球的外部; 环面的表面; 环面的内部; 环面的外部.
4. 举例表明: 一个连通集的原象不必连通.
5. 证明: 从圆的一个不是直径的弦或一个切线线段到该圆的中心射影是连续的. 断定: 圆弧都连通.
6. 举例表明: 两个连通集的交集不连通.
7. 说明平面中的下列点集是否连通: 至少有一个有理坐标的全体点; 恰有一个有理坐标的全体点; 两个坐标都是有理数的全体点. 如果不连通,举出一个分离.
8. 令平面中以(0, 0)为圆心,以一有理数 r 为半径的全体同心圆上的点集为 X; 找出 X 的一个分离.
9. 证明实数的一个连通集是下面八件事物中的一个: 空集, R 自身, 一条开的或闭的半直线,单独的一个点, 或一个开的,闭的, 或半闭的区间.
10. 证明闭区间的一个收缩序列的交集或者是单独的一个点, 或者是一个闭区间.
11. 给出任意区间 I 连通这一事实的另一证明: 先假定有一个分离 $I=A\cup B$; 然后造一些区间,使区间的一端在 A 中,另一端在 B 中,得到一收缩序列; 最后证明这些区间的交集的一点 c 不在 A 中或不在 B 中,而引出矛盾.

8. 拓扑性质与拓扑等价

这些节的基本任务是证明第一节所述的主要定理: 如果实值函数 fx 在闭区间 $a\leqslant x\leqslant b$ 中有定义且连续, 则函数 fx 有一极小值,一极大值,并取得介于二极值间的任一值. 我们已经完成为证明所需要的全部工作; 只需把各部分汇总起来. 下列三个命题都已证明:

1. 实数的一个闭区间是一紧致的连通集.

2. 紧致集的连续象是紧致的，连通集的连续象是连通的.

3. 实数的一个紧致并连通的集合是一闭区间.

把第6节中已证明的关于紧致性的断言，与第7节中已证明的关于连通性的断言合并起来，就得出前两个命题的每一个. 第三个命题是定理7.6. 这三个命题结合在一起断言：一个闭区间在 R 的连续象本身是一个闭区间. 这恰好是主要定理的另一个说法.

我们已经做了比证明主要定理超出很多的工作；我们已证明了好些具有相当一般性的定理，并且分析了论证，使能获得与主要定理相似的定理不会有更多的困难. 例如，把一个闭且有界集是紧致的这一结论（6节），跟命题2与3结合起来，我们就能断定：

如果 X 是 R^n 中的一个闭的、有界的、并且连通的集合，并且如果 $f:X\to R$ 连续，则象 fX 是一闭区间.

在 R^n 的闭的有界连通子集的许多不同类型中，有一种是 R^3 中一个球的表面. 因此，一个定义在球上的连续实值函数必有一极大值和一极小值，并能取遍其间的任一个值. 我们现在能看出：主要定理中关于 f 的定义域是闭区间这一假设是不必要的限制；只要要求定义域是闭的、有界的、连通的就够了.

现在我们开始回答问题：什么是拓扑学？

定义 R^n 的子集 X 的一种性质叫作拓扑性质，如果它等价于一个只利用 X 的开集的概念与集合论的一些标准概念（元素、子集、补集、并集、交集、有限集、无限集等等）来下定

义的性质．简短地说，R^m 的子集 X 的拓扑性质就是可以表达为 X 的开集族的性质的那一种性质．

紧致性与连通性都是拓扑性质．建议读者仔细地复习第 6 节与第 7 节中给出的这些概念的定义，并且注意其中没有提到 X 的大小、形状、长度、面积以及体积等性质．同样，X 中一闭集是一拓扑概念，因为根据定义，一闭集是 X 中一开集的补集．

一旦知道了一种性质或概念是拓扑的，我们就可以自由地利用它来定义别的拓扑性质与概念；例如闭集、紧致性以及连通性概念，就可以这样利用．

下面是一些特种集合的拓扑性质的几个例子．一直线 L 是一连通集，而 L 的每一点在 L 中的补集不连通．换句话说：挖去直线的任一点，这直线就不连通．一个圆没有这性质；但是挖去它的任一对点，它就不连通了．一平面的一些拓扑性质是：它连通，它不紧致，挖去它的任意有限个点，它并非不连通．

R^m 的子集 X 的一种性质如果牵涉到 X 或它的子集的诸如大小、形状、角度、长度、面积或体积等特性，它就不可能是拓扑性质．例如有界性指的是 X 的大小．X 在 R^m 中为闭集的性质牵涉到 R^m-X 这集合，而不只是牵涉到 X 的一些开集．从表面看来，有界与闭这两个性质没有一个有可能是拓扑性质．但是马上作轻率的结论，在这里是危险的．如果考虑 X 在 R^m 中既有界又闭这一性质，我们会同样地认为它不是拓扑性质；但在第 6 节中已证明，它等价于紧致性这一拓扑性质．显然，要肯定某一种性质不是拓扑性质，需要一种实用的检验法．这样一种检验法根据于两个点集拓扑等价这个概念．

定义 R^m 的子集 X 与 R^n 的子集 Y 叫作拓扑等价的(或同胚的)，如果存在一个一对一的函数 $f: X\to Y$ 使得 f 连续并且 $f^{-1}: Y\to X$ 也连续. 此外，这函数 f 叫作拓扑等价(或同胚).

我们来考虑一些例子. 我们已经观察到任两线段是相似的，并且相似变换是连续的. 因相似变换的反函数也是相似变换，从而任两线段是拓扑等价的(见图 8.1).

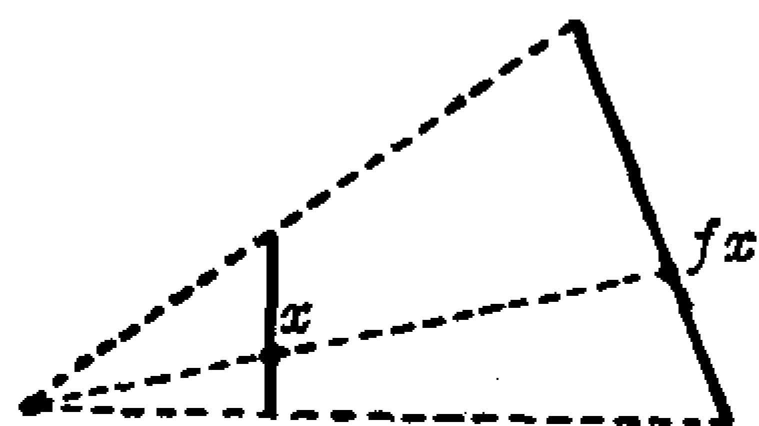


图 8.1

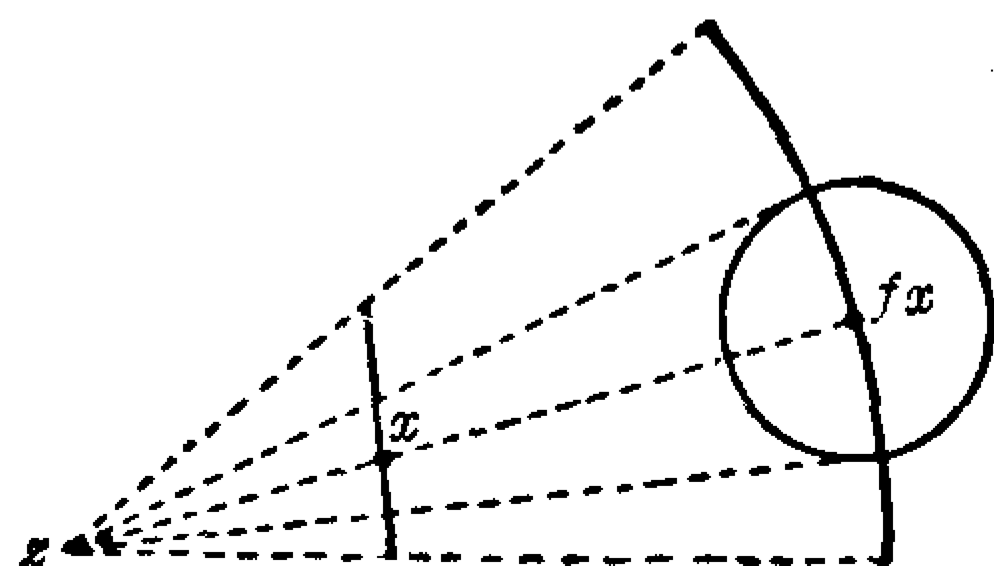


图 8.2

如图 8.2 所示，我们可以利用以 z 为中心的一个径向射影来定义一线段与一圆弧之间的拓扑等价. 作由邻域 $N(fx, \epsilon)$ 与点 z 所确定的楔形域，然后取正数 δ 如此小使 $N(x, \delta)$ 落在这个楔形域内，就可证明 f 是连续的. 因为 f^{-1} 缩短距离，它也连续.

事实上，一条升降频繁的曲线能与一线段拓扑等价. 图 8.3 表示定义在区间 I 上的一连续函数 f 的图形 C. 令 $g: C\to I$ 为垂直射影，所以 $g(x, fx)=x$. 显然 g 是一对一的，而且对于所有 $x\in I$, $g^{-1}x=(x, fx)$. 作为垂直射影，g 缩短距离，故 g 连续. g^{-1} 的连续性是 f 连续的推论. 所以任何连续函数 f 的图形 C 与线段 I 拓扑等价.

粗略地说，设一质点连续地从一点 p 走到另一点 q，描出一条不自交的曲线，这曲线与一线段拓扑等价(见图 8.4).

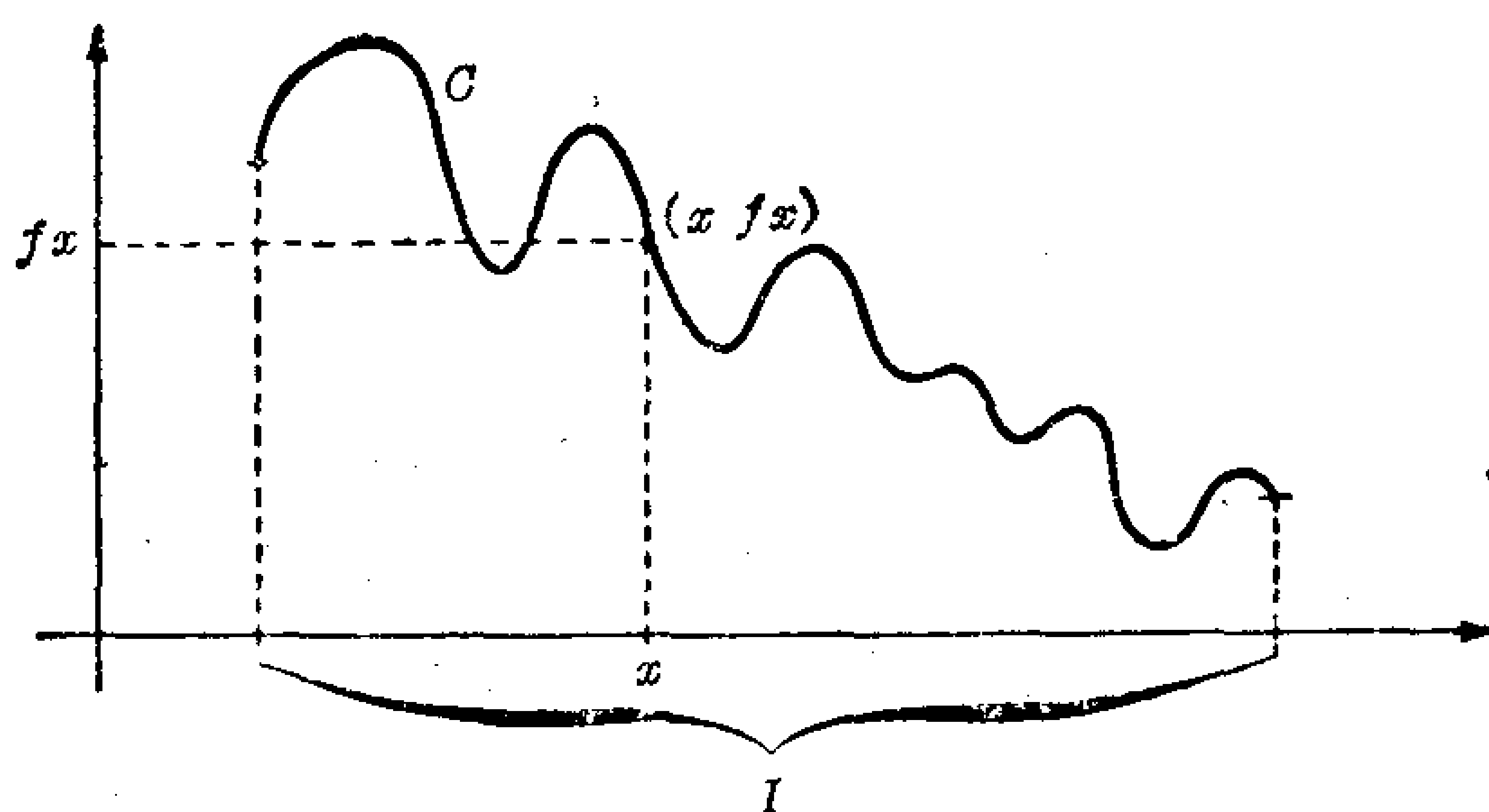


图 8.3

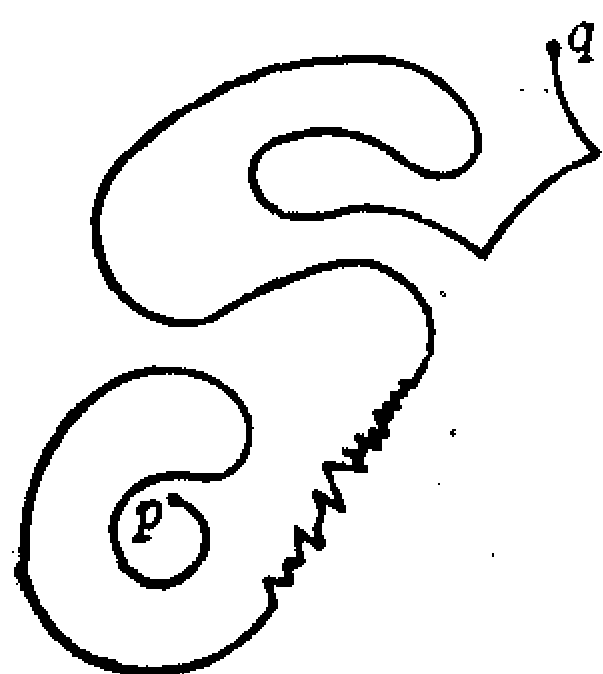


图 8.4

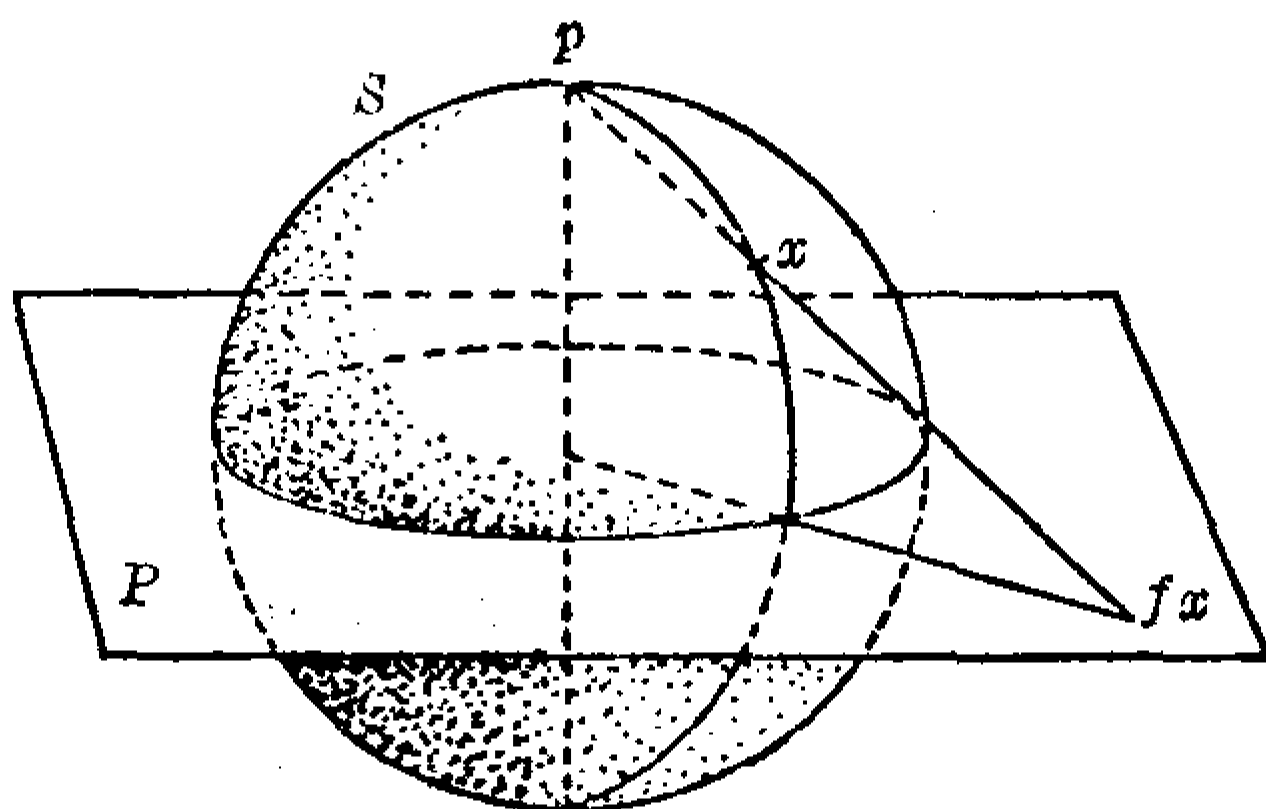


图 8.5

挖去了北极 p 的一个球面 S，到它赤道平面 P 的球极平面射影提供同胚的另一个例子(见图 8.5)．第 3 节习题 7 的解答说明这射影是 $S-p$ 与 P 之间的一个拓扑等价．如果我们把这射影限制在单独一个通过 p 的大圆 C 上，就得到 $C-p$ 与一直线 L 之间的一个拓扑等价．

已经说明了拓扑等价概念，让我们返回来讨论拓扑性质．下面的定理讲明这两个概念的基本关系．

定理 8.1 如果 R^m 的一个子集 X 与 R^n 的一个子集 Y

拓扑等价，则 X 与 Y 这两个子集的每一个，有另一个所具有的每一种拓扑性质。

这是显而易见的，因为一个拓扑等价或同胚 $f: X \to Y$ 建立起两个集合的点之间的一一对应关系，与它们的子集之间的一一对应关系（因 $A \subset X$，就有 $fA \subset Y$，又因 $B \subset Y$，就有 $f^{-1}B \subset X$），这对应关系是这样的，它使得开集对应于开集，并保留集合论的关系与运算（例如在 X 中 $A \subset B$ 当且仅当在 Y 中 $fA \subset fB$）。对于有关 X 的点，X 的子集，X 的开集，以及它们的集合论关系的任何真命题，如果把其中 X 的所有点与子集用它们在 Y 中的同胚象替换，所得到的关于 Y 的新命题自然也真。

我们用不连通这一性质来说明这论点。用开集来说，命题是：X 有两个非空开集 A 与 B，使得 $A \cup B = X$ 与 $A \cap B = \emptyset$。如果取 f 作用下的象并利用明显的关系 $fX = Y$，$f\emptyset = \emptyset$，$f(A \cup B) = fA \cup fB$ 与 $f(A \cap B) = fA \cap fB$，则得：Y 有两个非空开集 fA 与 fB 使得 $fA \cup fB = Y$ 与 $fA \cap fB = \emptyset$。故 Y 不连通。

我们用定理 8.1 来说明 R^m 的子集 X 的某些性质不是拓扑性质。因为一线段拓扑等价于任一别的线段，所以线段的长度不是拓扑性质。因为一线段与圆的一段弧等价，所以线段的平直不是拓扑性质。因为在球极平面射影下，挖去一点 p 的球面 S 与一平面 P 等价，所以 $S-p$ 的有界性不是一个拓扑性质。因为 P 在 R^3 中是闭的，而 $S-p$ 在 R^3 中不是闭的，P 在 R^3 中是闭集这一性质不是拓扑性质。

到此，对于"什么是拓扑学"这问题的回答应该是相当明显了：

拓扑学是研究点集拓扑性质的学科.

这是一个满意的回答，但是并不完全. 我们还必须包括函数的拓扑性质. 设 $f: X \to Y$ 是一函数，其中 $X \subset R^m$ 与 $Y \subset R^n$. f 的一个性质叫作拓扑性质，如果它等价于一种性质，其定义只用到 X 与 Y 的开集，象与原象，以及集合论的标准概念。

例如，连续性就是函数的一个拓扑性质，因为定理 4.5 说到 f 连续当且仅当 Y 的每个开集的原象是 X 的一个开集. 容易找出函数的拓扑性质. 另一个例子，f 是一个常函数这一性质是一拓扑性质. 再有，对于每一点 $y \in Y$, $f^{-1}y$ 是 X 的一个紧致子集，$f: X \to Y$ 的这性质是一个拓扑性质.

原问题的完满回答是：*拓扑学是研究点集与函数的拓扑性质的学科*.

按照这些定义的精神，我们再检查一下主要定理的证明. 在本节开始时，主要定理已分成三个命题. 第二个命题是纯拓扑的；它讲到：X 的一拓扑性质(紧致性)与 f 的一拓扑性质(连续性)蕴涵 fX 的一拓扑性质(紧致性). 用连通性替代这命题中的紧致性，新命题同样成立. 第一个命题叙述了 R 中的闭区间这一熟知对象的两个拓扑性质. 第三个命题是第一个的逆命题：紧致性与连通性这两个拓扑性质，刻划出 R 中闭区间的特征，把闭区间从 R 的其他子集区别出来. 因此我们能得出结论：主要定理的证明几乎全是拓扑的证明.

拓扑学曾经被人们叫作*橡皮几何学*. 如果要描绘与一特定点集 X 拓扑等价的那些点集，把 X 看成是用橡皮制成的，确是一种好的直观办法. 如果把橡皮制成的 X，这儿扯长些，那儿缩短些，并且扭弯一些(但决不撕裂开，也不把不同部分粘连起来)，变形成点集 Y，则 X 与 Y 是拓扑等价的. 例

如，一个小球面(气球)能膨胀成一个大球面，它也能被挤压成一椭球，还能再挤压成一个哑铃的表面．还有，能让一个吹鼓了的球面收缩，直到它恰紧绷在一长方盒子或一四面体表面(图 8.6)．

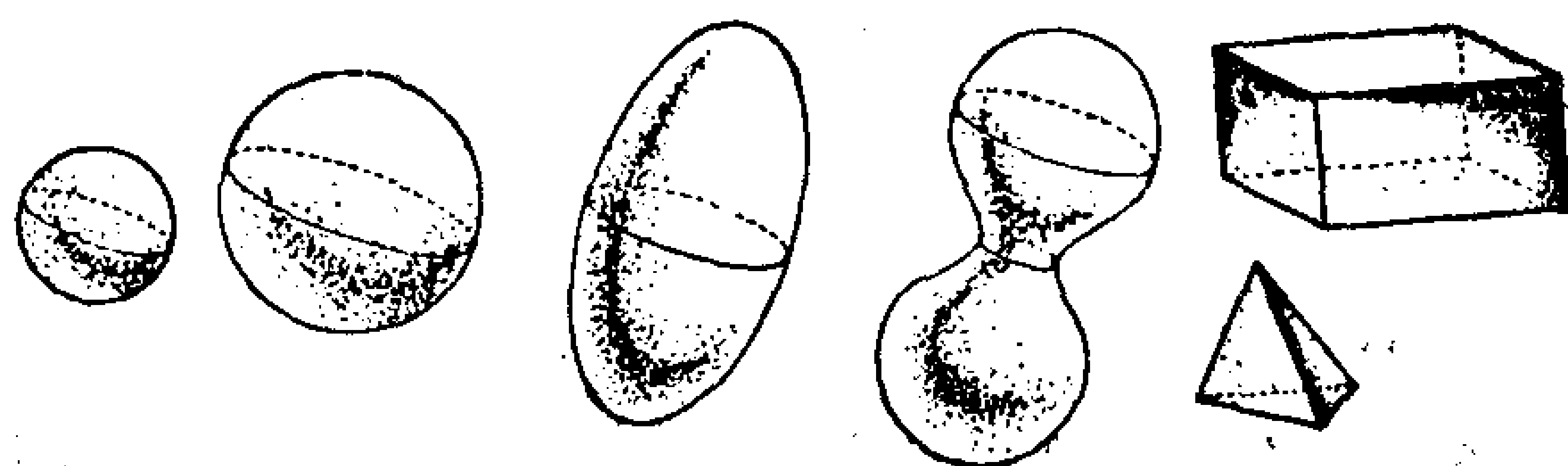


图 8.6

因为两个拓扑等价的点集具有完全相同的拓扑性质，拓扑学者把它们看成本质上是相同的(从拓扑观点来看，无区别的)．这类似于欧氏几何学中把两个重合的图形看作完全等价这一观点．所以拓扑学者被人们称为不能区别出一个油炸面圈与一咖啡杯的数学家．图 8.7 表示一个实心油炸面圈变形成一个咖啡杯子的几个中间步骤．

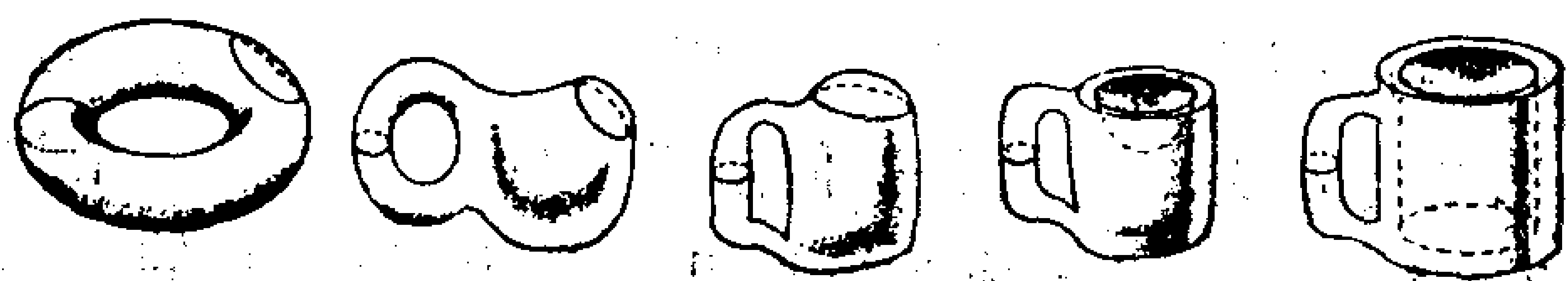


图 8.7

在每一种经典几何学中，都有等价图形这一概念．已经指出，在欧氏几何学中，两图形等价，如果它们重合，特别是，如果有一刚体运动，把一图形变成另一个．在射影几何中，如果有一个射影变换把一图形变成另一个，则这两图形等价．射影变换包括重合与相似，以及足够多的别种变换，因而任何两个三角形是等价的，任一圆与任一椭圆是等价的(见图 8.8)．

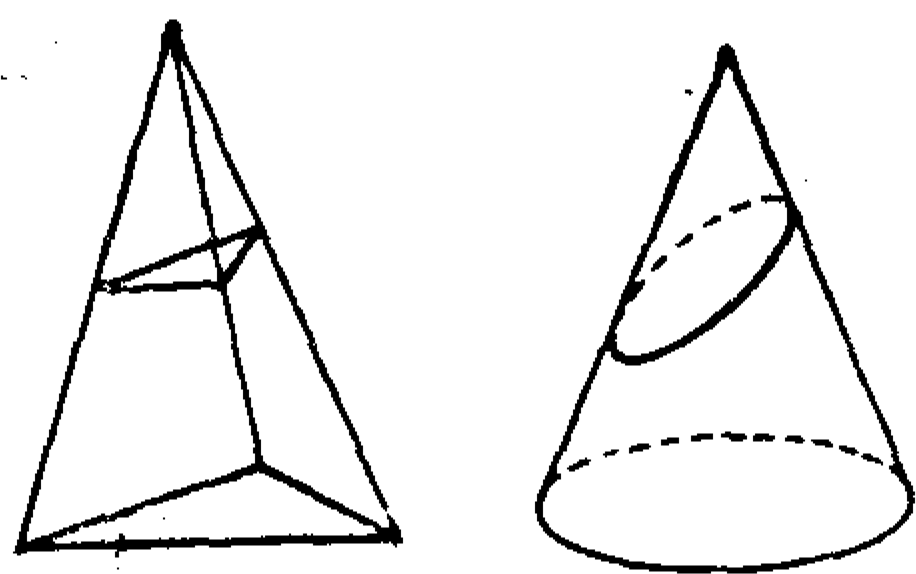


图 8.8

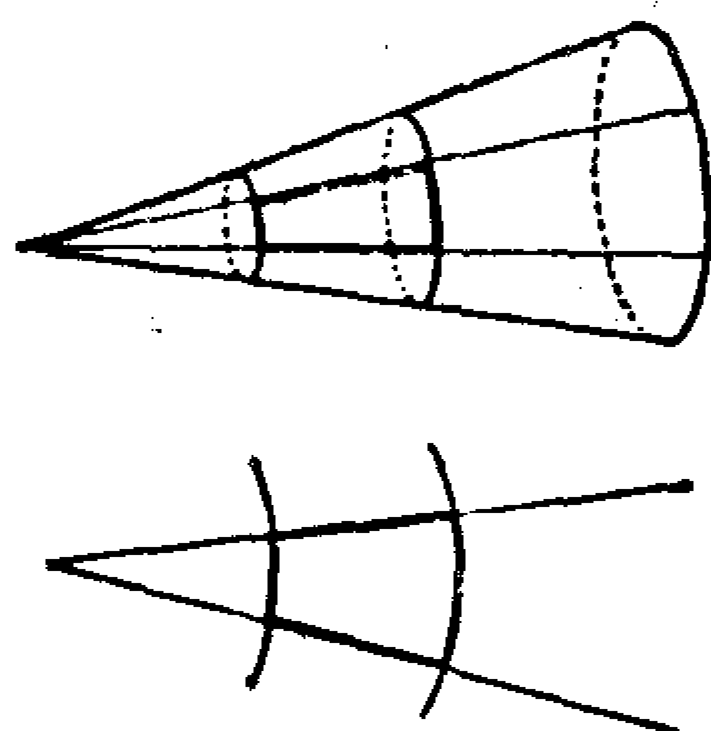


图 8.9

在微分几何中，等价叫作等距(等度量)．这里，两个图形等价，如果在它们的点之间存在着一一对应，使得在定义域中任一曲线的长度等于值域中相应曲线的长度．例如，圆柱面的一部分能铺开放在平面的一部分上面．同样，锥面的一部分能铺开放在平环的一扇形上面(见图 8.9)．所以这些曲面都等距．

重合性，射影对应性，与等距性都是拓扑等价；因为在每种情形，两个等价图形之间的对应关系是一对一的，并且在每一方向都连续．从而一个这种图形的每一个拓扑性质也是另一个图形的一个性质，所以一个拓扑性质也是欧氏几何意义下、射影几何意义下与微分几何意义下的一个性质．结果，拓扑学的一个定理自动地成为这些几何学中每一种的一个定理．由此，有充分正当的理由来说：拓扑学是基本的几何学．

习　　题

1．求出 X 与 Y 之间的一个同胚，如果：

(a) X 是一个开区间，Y 是一条直线．

(b) X 是一半开区间，Y 是一条射线．

(c) X 是一个圆的内部，Y 是平面．

2. 证明：挖去一点的一个圆与一个开区间拓扑等价.

3. 一个集合叫作完全不连通，如果它的连通子集只是单独的点集与空集. 举出 R 的子集的两个例子，它们完全不连通并且包含无穷多的点.

4. 一个集合 X 叫作局部连通的，如果对于每点 $x\in X$ 与每个邻域 $N(x, r)$，存在着 X 的一个连通开集 U，使得 $x\in U\subset N(x, r)$. 断定下列集合的每一个是否局部连通：

   (a) 全体整数集；(b) 集 $\left\{0, \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots,\right\}$；

   (c) 集 $[a, b]$；　　(d) 有理数集.

5. 一集 X 叫作局部紧致的，如果 X 的每一点在 X 中有一邻域，被包含在 X 的一紧致子集中.

   (a) 举出一个非紧致而是局部紧致的集合.

   (b) 证明 R^m 中每个闭集是局部紧致的.

6. 断定下列性质的哪一个是拓扑的而哪一个不是. 对于所给的每个不是拓扑性质的性质，求出两个拓扑等价的集合，其中一个有所给的性质而另一个没有.

   (a) X 无界.

   (b) X 是一有限集.

   (c) X 是长度为 2 的一曲线.

   (d) X 是局部紧致集.

   (e) X 是一凸多边形.

   (f) X 是局部连通.

   (g) X 是完全不连通.

7. 用下列命题的证明来说明定理 8.1 的论证：如果 R^m 的一个紧致子集 X 与 R^n 的一个子集 Y 拓扑等价，则 Y 是紧致集.

8. 一函数 $f: X\to Y$ 的下列性质的哪一个是拓扑性质？

   (a) X 的每一个开集的象是 Y 的一个开集.

   (b) f 是一相似变换.

   (c) f 是一平移.

(d) 每一点的原象是一有限集.
(e) 每一点的原象是一紧致集.
(f) Y 的原象是有界的.
(g) 每一点的原象是一连通集.

9. 关于不动点的一个定理

如果一个函数 f 的定义域与值域是同一个集合 X, f 就叫作 X 的一个自映射. X 的自映射 f 可能会使 X 的某个点 x 原地不动, 就是可能会使 $fx=x$. 具有这性质的点 x 叫作自映射 f 的一个不动点. 如果把一圆片绕中心旋转一直角, 圆片中心是唯一的不动点. 这映射如果限制在圆片的边缘圆周上, 就没有不动点. 一空间的每一个常值自映射有一个不动点. 于是一个集合的一个自映射有否不动点, 取决于这集合与这自映射. 但是, 在集合为一线段(闭区间)的情形, 有下面值得注意的结果.

定理 9.1 一线段的每一个自映射至少有一个不动点.

设在直线上引进了坐标, 使线段成为一区间 $[a, b]$. 于是线段的一个自映射恰好是一个连续函数 $f:[a,b]\to[a, b]$. 对于每一个 $x\in[a, b]$, 用 $gx=fx-x$ 来定义一个新函数 $g:[a, b]\to R$. 于是 g 给出从 x 到它的象 fx 的有向距离. 当 fx 在 x 之右, 即 $fx>x$ 时, 距离是正的, 当 fx 在 x 之左, 距离是负的. 找 f 的一个不动点, 就是找使 g 为零的点. 如果两个端点的任一个是不动点, 就已符合定理的结论, 没什么还要证明的. 现在假设两个都不是不动点. 因为 fa 与 fb 都在

$[a, b]$中，$a<fa$ 而 $fb<b$；因而 $ga>0$，$gb<0$. 因为 g 连续(它是两连续函数之差，见第 3 节的习题 8)，主要定理断言：g 取 ga 与 gb 之间的每一个值. 故对于某个 $x\in[a, b]$，必有 $gx=0$，而这个 x 就是所寻求的 f 的不动点.

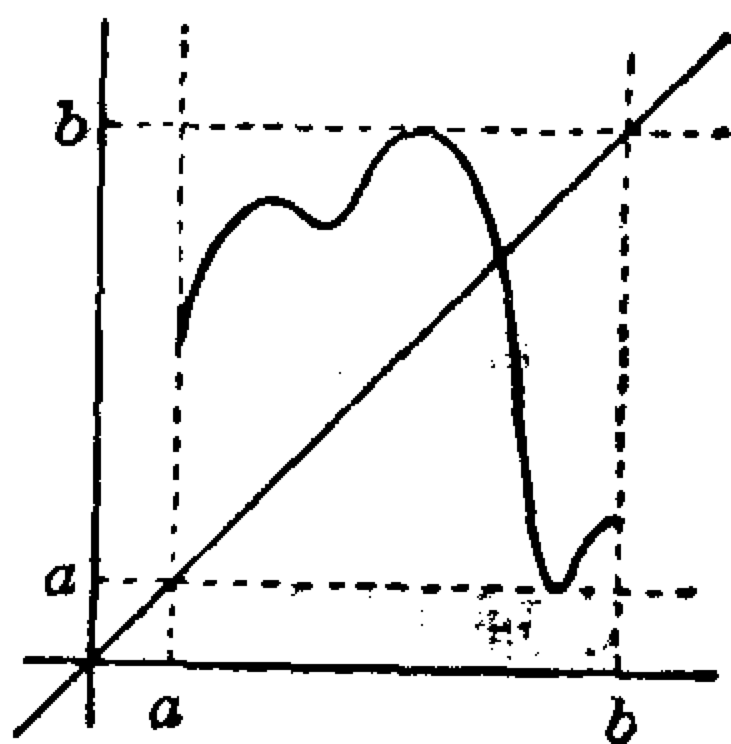


图 9.1

设图 9.1 的曲线是 f 的图形. 我们可以从图形的观点来检验定理 9.1. f 的不动点就是 f 的图形与对角线的交点(即如果 $fx=x$，则 $(x, fx)=(x, x)$ 在对角线上). 因为 $a<fa$，所以 (a, fa) 这点位于对角线上方，同样 (b, fb) 这点位于对角线下方. 因为对角线把平面分成它上方与它下方两部分，而 f 的图形是一连通集，所以它必与对角线相交. 函数 g 给出图形与对角线之间的垂直距离.

习　题

1. 求出区间$[0, 1]$的由 $fx=(1-x^2)^{1/2}$ 定义的满的自映射的不动点.
2. 设区间$[0, 1]$的满的自映射是由 $fx=4x-4x^2$ 定义的.
   (a) 画出函数的图形与对角线 $y=x$.
   (b) 在区间中映射是一对一的吗?
   (c) 求出映射的不动点.
3. 设区间$[0, 1]$的自映射是由 $fx=x^2-x+1$ 定义的.
   (a) 画出函数的图形与直线 $y=x$.
   (b) 在区间中映射是否一对一?
   (c) 求出映射的不动点.
4. 证明 R^n 中一个集 X 的下列性质是拓扑性质：X 的每一个自映射有一个不动点.
5. 举出区间 $[0, 1]$ 的一个自映射，它恰只以 0 与 1 为它的两个不动

点.

6. 举出开区间$(0, 1)$的一个无不动点的、满的自映射.

7. 证明一个半开区间的每一个满的自映射至少有一个不动点.

10. 圆到直线的映射

圆具有下述的一个奇特性质:

定理 10.1 圆到直线的每一个映射都把某对对径点映成同一个象点.

证明 令$f: C \to L$为圆到直线的一个映射. 在L上引进坐标, 就可把f的值域看作是实数R. 考虑C上的一对对径点p与p'(图 10.1); 设它们在L上的象点分别有坐标$fp=a$与$fp'=b$. 这一对固定的对径点p与p'把圆分成两个闭的半圆, 都以p与p'为端点. 令x与x'为圆上的变动的一对对径点; 当x沿着一个闭的半圆从p走到p', x'就沿着另一个闭的半圆从p'走到p. 现在观察由下面的式子定义的函数g:

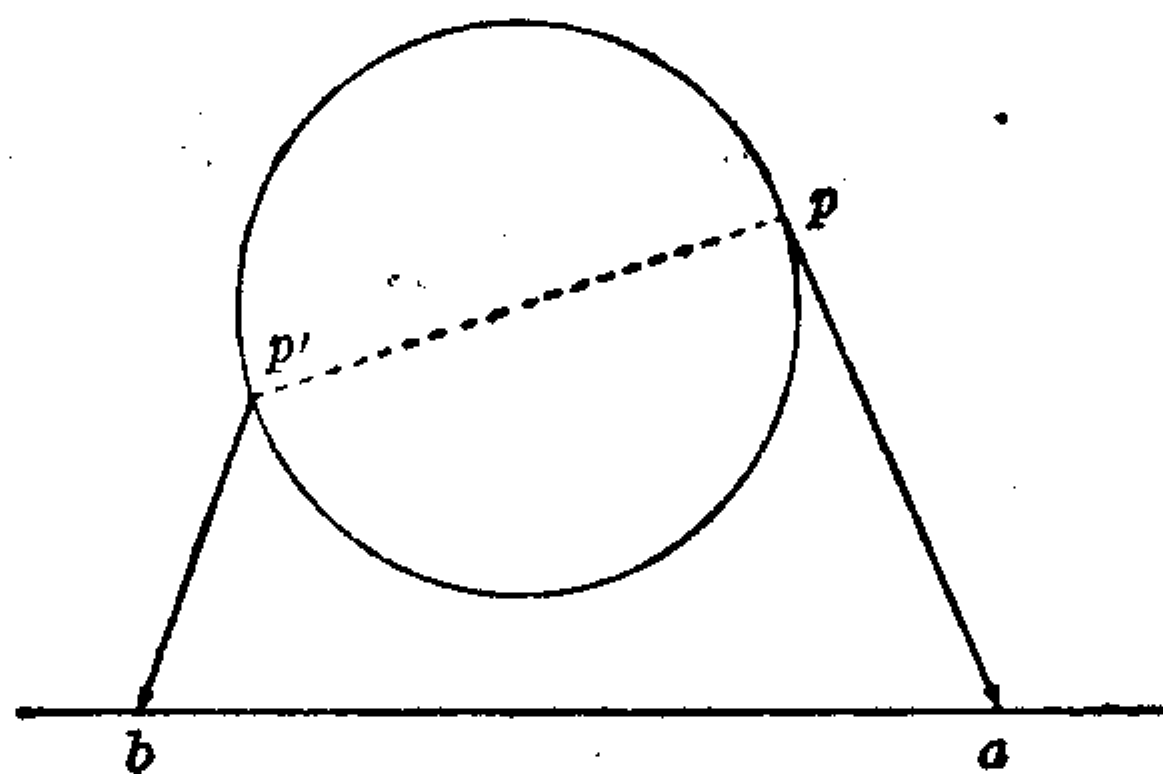


图 10.1

$$gx=fx-fx'.$$

它的定义域是x走过的闭的半圆; 函数g连续, 因为f连续. 显然, 在定义域的两端处:

$$gp=fp-fp'=a-b,\ gp'=fp'-fp=-(a-b).$$

因为 $a-b$ 或者等于零，或者不等于零，所以相应地，函数 g 在 p 与 p' 处或者都是零(这时，p 与 p' 的 f 象相同)，或者 g 在 p 与 p' 处的值有相反的符号．在第二种情形，应用主要定理到 g 的半圆定义域，就获得其中的一点 q 使 $gq=0=fq-fq'$．因而 $fq=fq'$，即一对对径点 q 与 q' 的 f 象相同．

类似于圆的对径点的，在椭圆上是对极 (antipodal) 点；椭圆的一对对极点关于椭圆中心对称．因为圆是椭圆的特例，所以对径点是对极点的特例．因而自然会问：对于椭圆的对极，是否成立类似的定理．

如果圆 X 与椭圆 Y 有同一个中心 z，并且在同一平面上，下述的作图最容易给出一个同胚．作以 z 为起点的任一射线交 X 于一点，也交 Y 于一点；这两个点的对应就是一个同胚．这实质上是第 3 节中所提到的从 R^2 到 X 的满的径向射影，并且在该节中已经证明它是连续的．如果 X 与 Y 不是同心的，则先把 Y 径向射影到与 Y 同心的圆 X' 上，然后再找同胚(见图 10.2)．因为 X 与 X' 相似，X 就与 X' 拓扑等价，而 X' 已与 Y 拓扑等价．此外，由径向射影与相似变换复合而成的同胚 $Y\to X$，保持对极性；即如果 q 与 q' 是对极点，并且 q 的象是 p，则 q' 的象是 p 的对径点 p'．所以把对极点与对径点理解为扮演同一角色时，这对径点定理对于

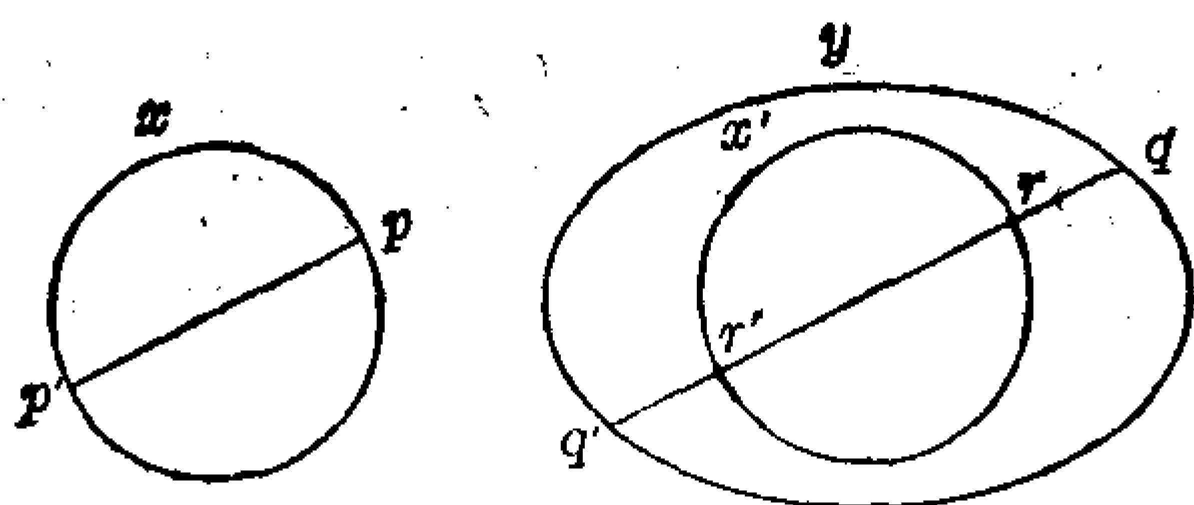


图 10.2

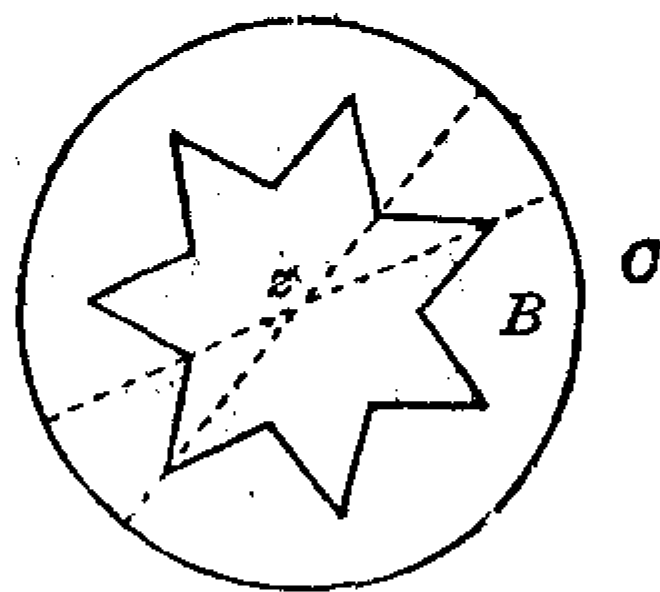


图 10.3

椭圆也成立。

类似的论点还证明，对于任意星形闭曲线，如图 10.3 中的多边形 B，这结果也成立．通过一个以 z 为中心的、从 B 到圆 C 的满的径向射影，就获得一个同胚，它把过 z 的同一直线上的 B 的每一对点变成该直线上 C 的一对对径点。

习　题

1. 在图 10.4 中，令 $f:C\to L$ 为以圆 C 外一点 p 为中心的、从圆到直线的射影。

   (a) 画出 L 的各点的原象。

   (b) C 上的哪一对对径点在 L 中有同一个象点？

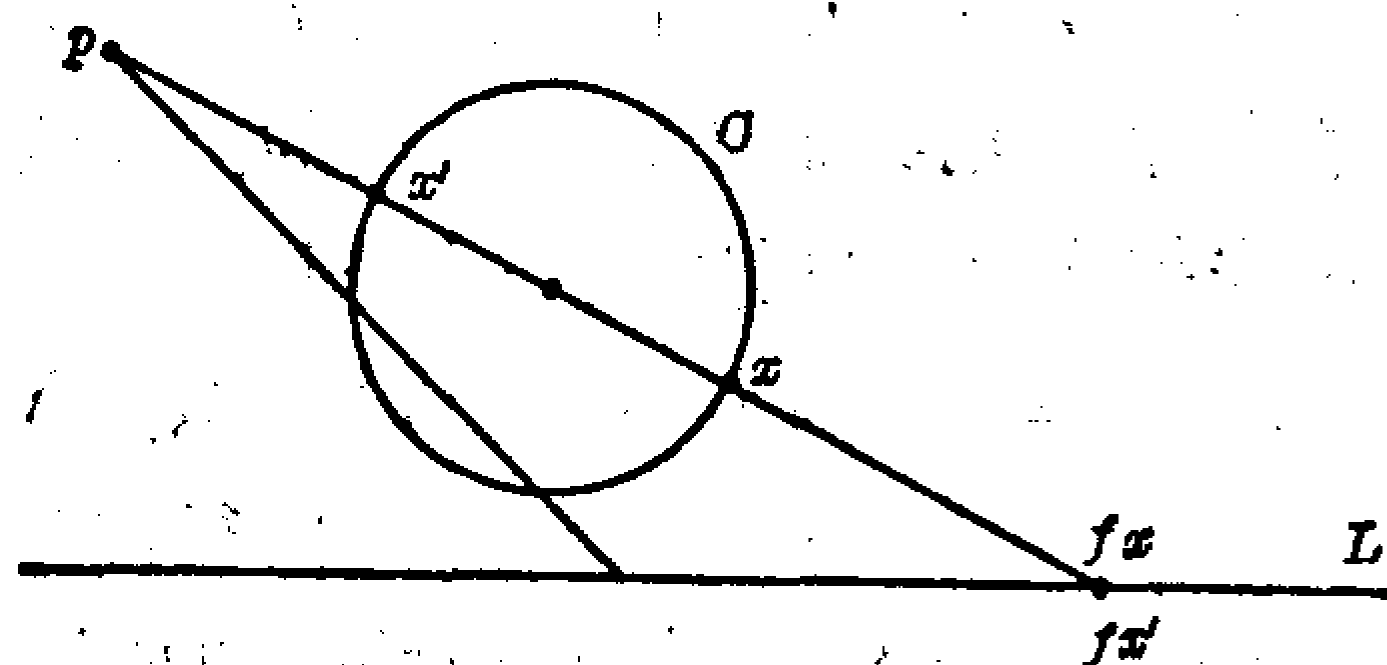


图 10.4

2. 令 L 切圆 C 于 p．以 C 上的 p 的对径点 p' 为中心，把 C 投射到 L．画出 L 的点的原象。为什么对于这个映射，定理 10.1 不能运用？

3. 如果圆 C 被对径点 b 与 b' 分成两个半圆 D 与 D'，证明：在任意映射 $f:D\to D'$ 中，某点与它的象点是关于直径 bb' 的对称点．

4. 如果圆 C 被对径点 b 与 b' 分成两个半圆 D 与 D'，证明任意映射 $f:D\to D'$ 把某点映成它的对径点．

5. 举出一例，说明圆到直线的非恒同映射使得每两个对径点都有一个象点。

11. 薄煎饼问题

薄煎饼的第一个问题可以大致叙述如下：设想两个形状不规则的薄煎饼放在同一个圆形的案板上；试证：一刀能把两个饼正好都切成两半。如果每个薄煎饼的形状都恰好是圆形的，那么沿着它们的圆心的连线切一刀，就能达到目的。但是在薄煎饼的形状不加限制时，问题就变得比较困难。下面是精确的数学定理。

定理 11.1 如果 A 与 B 是同一平面中的两个有界区域，那么平面中存在一条直线，它把每个区域分成等面积的两半。

所谓平面中一个区域，指的是平面的一个连通开子集。定理即使在两个薄煎饼之一堆迭在另一个上面时仍旧成立，也就是说，当两个区域部分地重迭起来时仍旧成立。

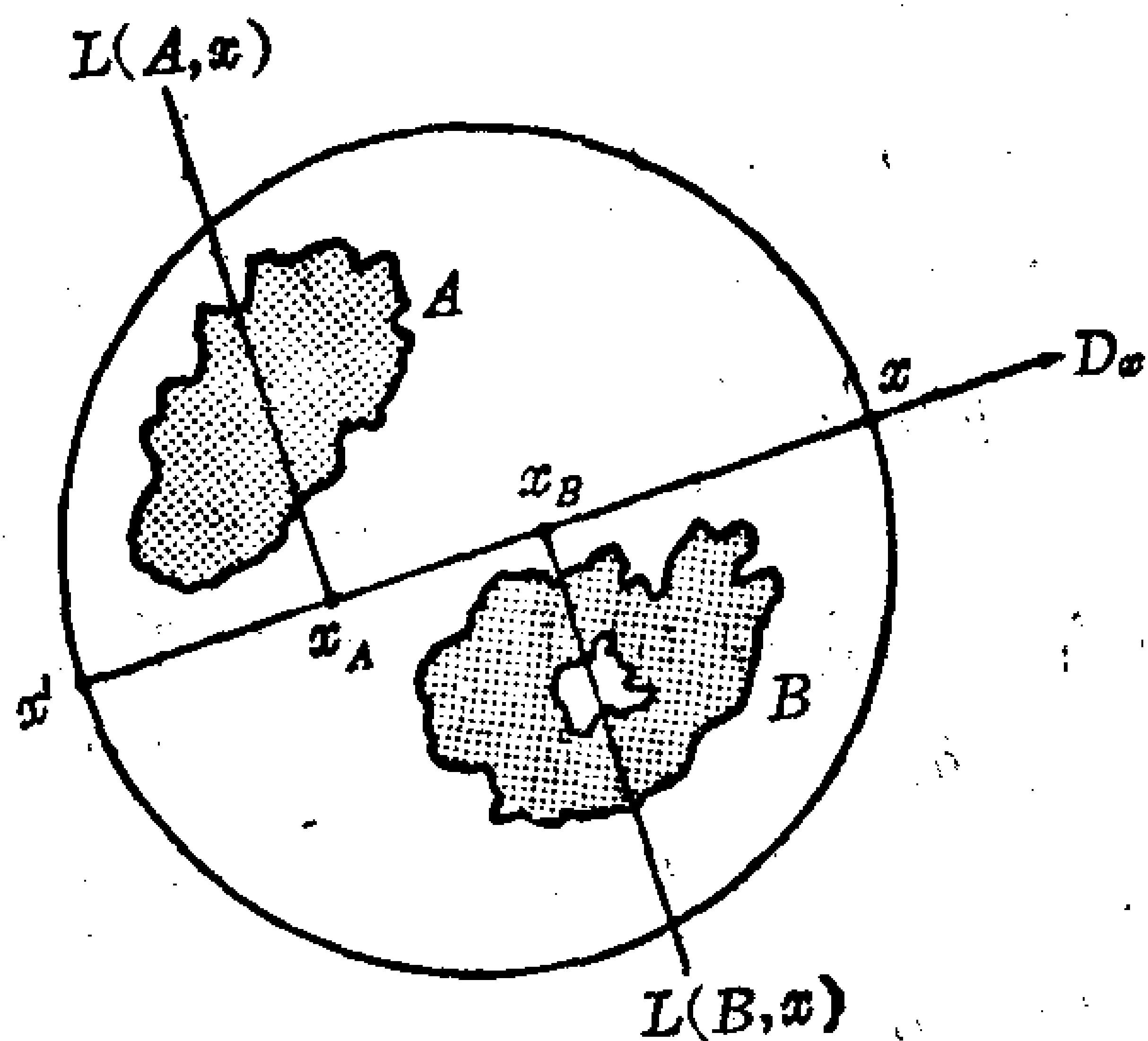


图 11.1

因为证明相当长，我们先给出它的主要步骤，而把两个次要命题的证明推迟。因为 A 与 B 是有界的，我们可以选取一个圆 C 把 $A\cup B$ 包含在它的内部（见图 11.1）。令 z 与 r 分别表示 C 的中心与半径。对于任一 $x\in C$，

令 x' 表示它的对径点，D_x 表示从 x' 到 x 的直径．我们以后要证明的第一个命题是

(1) 对于任一 $x\in C$，在垂直于 D_x 的全体直线中，有而且只有一条直线 $L(A, x)$ 把 A 按面积分成两半，有而且只有一条直线 $L(B, x)$ 把 B 按面积分成两半．

用 x_A 与 x_B 分别表示 D_x 同 $L(A, x)$ 与 $L(B, x)$ 的交点．在 D_x 上我们有一个以 z 为原点的自然尺度（或坐标系）：一点的坐标是它到 z 的有向距离，按照该点与 x 在同侧或异侧，它的坐标就分别是正的或负的．令 g_Ax 与 g_Bx 分别表示 x_A 与 x_B 的坐标．现在，对于每个 $x\in C$，规定

$$hx=g_Ax-g_Bx.$$

我们以后要证明的第二个命题是

(2) 函数 $h:C\to R$ 连续．

h 的一个决定性的性质是：它在圆的任两对径点处的值，绝对值相等而符号相反，即

$$hx'=-hx, \text{对于任何 } x\in C.$$

这个式子的证明如下．注意到 $D_{x'}=D_x$，故 $L(A, x)=L(A, x')$，$L(B, x)=L(B, x')$；因而 $x'_A=x_A$ 与 $x'_B=x_B$．但是，在 $D_{x'}$ 上，坐标的正向与 D_x 上的相反；从而 $g_Ax'=-g_Ax$ 与 $g_Bx'=-g_Bx$，所以

$$hx'=g_Ax'-g_Bx'=-g_Ax+g_Bx=-hx.$$

现在，由定理 10.1，存在 C 的一点 x 使得 $hx'=hx$．对于这个 x，$hx'=hx$ 与 $hx'=-hx$ 都成立；因而 $hx=0$，这蕴涵着 $x_A=x_B$．于是 $L(A, x)=L(B, x)$ 这同一条直线把 A 与 B 按面积各分成两半．

(1)的证明　给定一数 y，D_x 上就有一个以 y 为坐标的点．令 L_y 表示通过这点并垂直于 D_x 的直线，又令 fy 表示

A 在 L_y 正侧(在 y 增值方向的一侧)的那部分面积. 于是 f 是一个实变数的实值函数, $f:R\to R$. 当 y 从 $-r$ 变到 r 时, 直线 L_y 把 C 的内部扫过一遍. 设想 L_y 是一条钢针架在横槽 D_x 上, 并且与 D_x 成直角. 当钢针的支点沿着横槽 D_x 从 x' 到 x 时, 这钢针横扫 C 的内部. 当 $y=-r$ 时, 钢针在 x' 处, 全部 A 在正的一侧, 所以 $f(-r)$ 是 A 的面积. 当 $y=r$ 时, 钢针在 x 处, 全部 A 在负的一侧, 所以 $fr=0$.

为了证明 f 连续, 令 y, $y'\in R$, 其中 $y<y'$. 于是 $fy-fy'$ 是 A 在直线 L_y 与 $L_{y'}$ 之间的那部分面积. 因为这是包含在图 11.2 中用阴影表出的矩形域中, 从而 $|fy-fy'|<2r|y-y'|$. 对应于一个 $\epsilon>0$, 我们取 $\delta=\epsilon/2r$. 于是, 当 y' 在 y 的 δ 邻域中时, fy' 就在 fy 的 ϵ 邻域中. 所以 f 在 y 处连续. 因为对每个 y 都如此, 所以 f 连续.

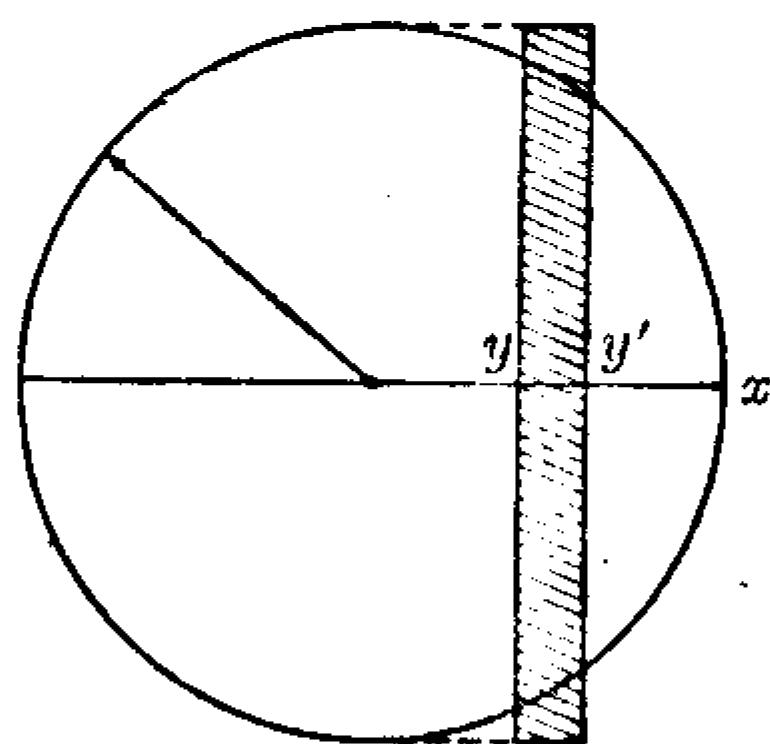


图 11.2

根据主要定理, 当 y 从 $-r$ 到 $+r$ 变化时, fy 取遍从 A 的面积开始直到零的诸值. 因此至少有一个 y 值, 使 fy 正好是 A 的面积的一半, 因而 $L_y=L(A, x)$ 把 A 按面积割成两半. 我们还需要证明只有一个这样的分割. 用反证法: 设 L_y 与 $L_{y'}$ 都把 A 分成两半(即 $fy=fy'$), 而且 $y\neq y'$, 不妨设 $y<y'$. 令 Q 表示介于 L_y 与 $L_{y'}$ 之间的带形区域, 它是一个开集, 它的补集分成两部分, 一份包含 $L_{y'}$ 的正侧而另一份包含 $L_{y'}$ 的负侧. 因为 A 是连通的并且包含这两部分的每一份中的点, A 必包含 Q 的一点, 譬如 p. 因为 A 与 Q 都是开集, $A\cap Q$ 是开集, 所以它包含 p 的一个邻域. 所以 $A\cap Q$ 有正的面积, 因而 $fy>fy'$. 这与 $fy=fy'$ 矛盾, 就证明了唯一性.

同样可以证明 $L(B, x)$ 的存在与唯一性．(1) 证毕．

(2) 的证明 因为 h 是差 $g_A - g_B$，只要证明 g_A 与 g_B 连续就行了(参看第 3 节的第 8 题)．令 c 为 C 的一点；我们要证明 g_A 在点 c 处连续．又按照上面的记号，令 c_A 为直径 D_c 上的那个点，在该点处垂线 $L(A, c)$ 把 A 切成两半(参看图 11.3)．令 x 为 C 的挨近 c 的一点．过 $L(A, c)$ 与 C 的交点 u 与 v，分别作 D_x 的垂线 K 与 K'．直线 $L(A, c)$ 把 C 的内部分成 U 与 V 两部分．介于 K 与 K' 之间的带形窄条把它在 C 内部中的补集分成 U' 与 V' 两部分，使 $U' \subset U$ 与 $V' \subset V$．所以 U' 与 V' 的每一个至多包含 A 的面积的一半．从而垂直于 D_x 的并且把 A 分成两半的直线 $L(A, x)$ 在这窄条中，因而 $L(A, x)$ 与 D_x 的交点 x_A 也在这窄条中．因为过点 c_A 的、以 z 为中心的圆与 D_x 相遇于这窄条的内部，从而

$$|g_A x - g_A c| < w,$$

其中 w 是这窄条的宽度．

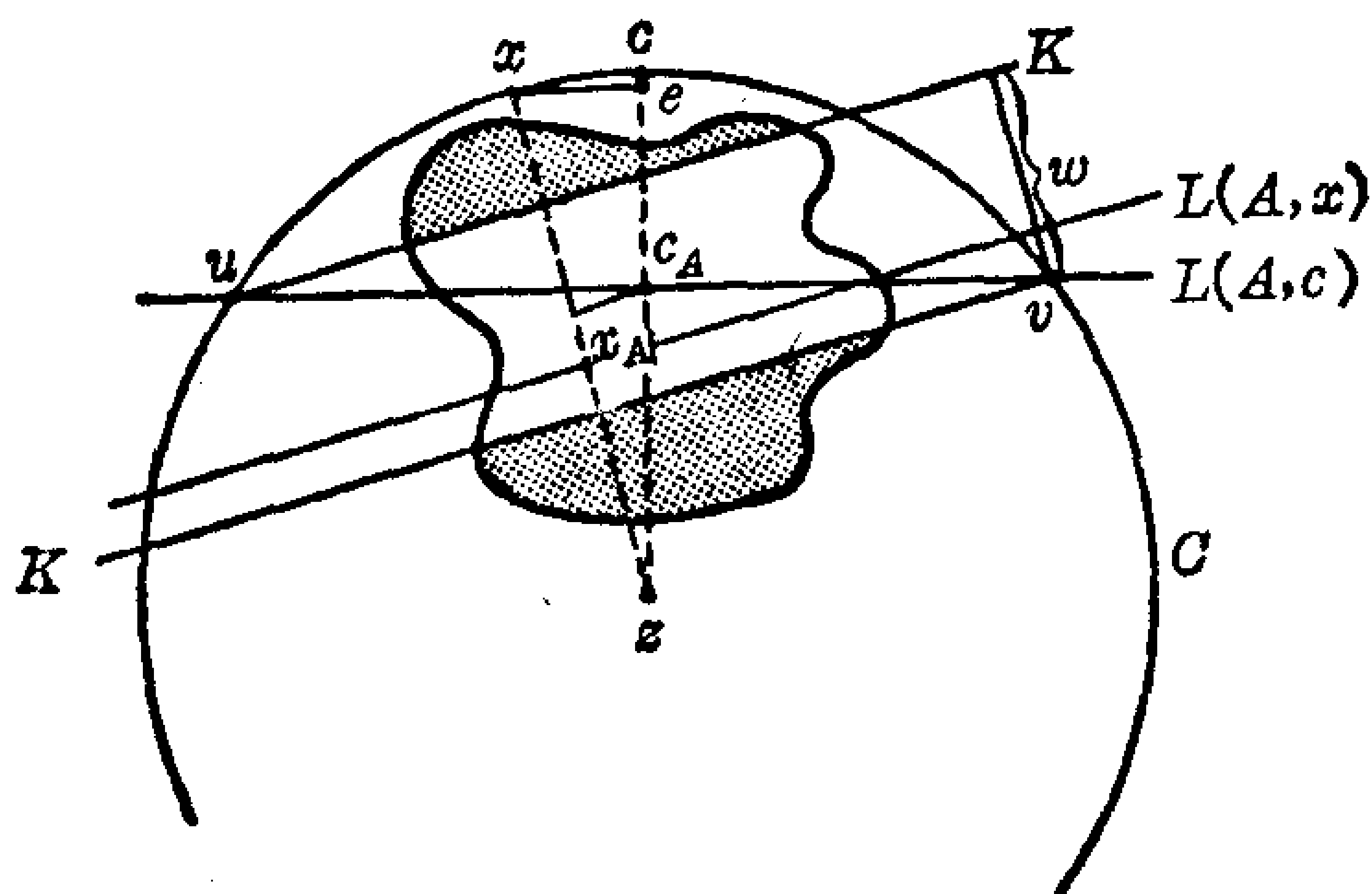


图 11.3

要得到 w 的大小的估计，注意由两个三角形的相似得

$$\frac{w}{d(u, v)} = \frac{d(e, x)}{d(z, x)},$$

其中 e 是 x 到 D_0 的垂足. 因为 $r=d(z, x)$, 上式是

$$w=\frac{d(u, v)}{r}d(e, x).$$

因为 $d(u, v)\leqslant 2r$, 并且 $d(e, x)\leqslant d(c, x)$, 得

$$w\leqslant 2d(c, x),$$

所以
$$|g_Ax-g_Ac|\leqslant 2d(c, x).$$

若 $\epsilon>0$, 而 $x\in N(c, \epsilon/2)$, 从而

$$|g_Ax-g_Ac|<\epsilon.$$

这就证明了 g_A 连续. 同样地 g_B 连续. 这完成了(2) 与定理 11.1 的证明.

关于薄煎饼的第二个问题,要求沿着两条垂直的直线,把薄饼两刀切成四块相等的部分.

定理 11.2 如果 A 是平面中的有界区域,那末存在着两条垂直的直线,把 A 分成面积相等的四份.

如同先前一样, 把 A 放在一个圆 C 的内部. 对于每个 $x\in C$, 令 L_x 为垂直于 D_x 的分 A 成两半的直线, 又令 K_x 为平行于 D_x 的分 A 成两半的直线. 这两条线把 A 分成四份, 它们的面积按反时针方向依次用 P_x, Q_x, R_x, S_x 表示(看图 11.4). 因为 L_x 与 K_x 各把 A 分成两半, 我们有

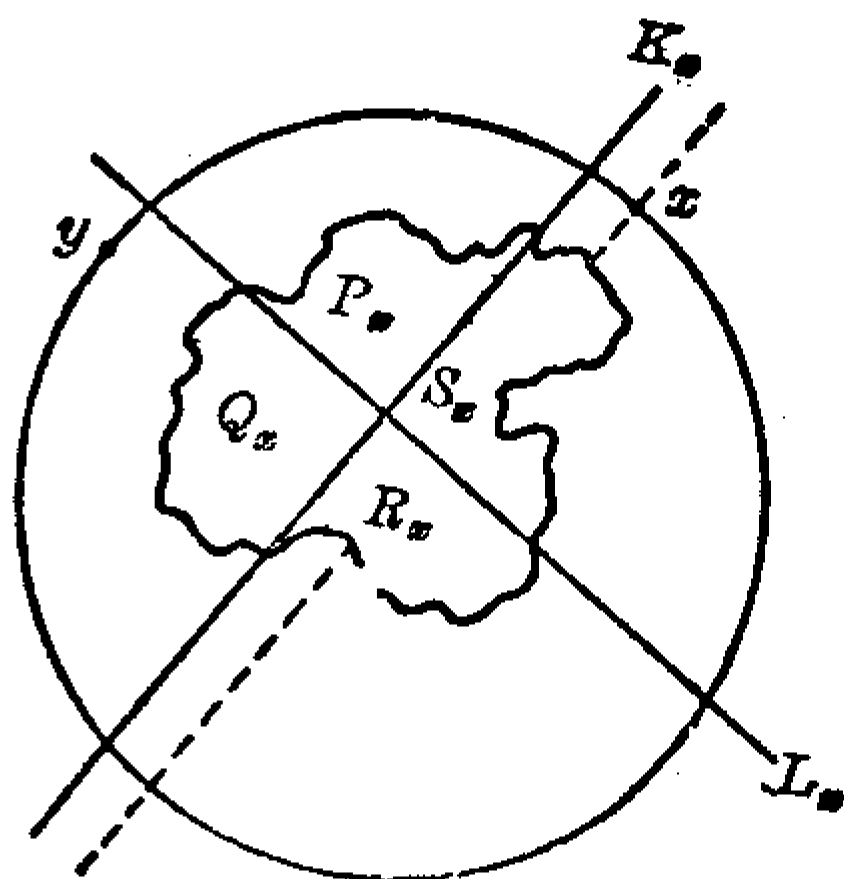


图 11.4

$$P_x+Q_x=R_x+S_x$$

与
$$Q_x+R_x=S_x+P_x.$$

这些等式相减, 得 $P_x=R_x$ 与

$Q_x=S_x$. 如果碰着好运气还有 $P_x=Q_x$, 则直线 L_x 与 K_x 就解决了问题. 但一般并不是这样; 在 P_x 不等于 Q_x 时, 设差 $P_x-Q_x=fx$; 要问:当 x 绕圆移动时这函数 fx 怎样变化. 如果 $y\in C$ 是这样一点, 它使 D_y 垂直于 D_x, 则显然有 $L_y=K_x$ 与 $K_y=L_x$. 从而 $P_y=Q_x$ 与 $Q_y=R_x$. 因为 $P_x=R_x$, 得

$$fy=P_y-Q_y=Q_x-P_x=-(P_x-Q_x)=-fx.$$

所以当 x 移动一段 90° 弧时, 函数 f 改变了符号. 一旦证明了 f 连续,就会从主要定理得出结论:在每一段 90° 弧的某点处, $fx=0$. 这样的一点提供了所求的切割.

我们只简略地描述一下连续性的证明. 因为 f 是两函数的差, 只要证明 P_x 连续就行了(Q_x 连续的证明类似). 令 $c\in C$ 是我们要证明 P_x 在那里连续的一点, 又令 x 为挨近 C 的一点. 从一对垂线 L_c, K_c 过渡到类似的一对垂线 L_x, K_x, 能用两步完成. 首先绕着 L_c 与 K_c 的交点 p, 把 L_c, K_c 旋转到分别与 L_x, K_x 平行的一对垂线 L'_c, K'_c. 旋转角 α 是 C 上从 c 到 x 的劣弧所对的角. 第二步是把 L'_c, K'_c 平移到 L_x, K_x. 可以看到, 从 P_c 到 P'_c 的改变量不会大于顶点在 P 而角为 α 的 C 的偏心扇形的面积, 这面积至多是 $2rd(c, x)$, 其中 r 是 C 的半径. 介于 L'_c 与 L_x 之间并且在 C 内部的面积 U 至多是 $2ru$, 其中 u 是 L'_c 与 L_x 之间的距离. 同样, 介于 K'_c 与 K_x 之间的面积 V 至多是 $2rv$. 从 P'_c 到 P_x 的改变量显然小于

$$U+V\leqslant 2r(u+v).$$

还可以看出, L_c 与 L_x 的交点 q 是在 C 的内部,因为 L_c 与 L_x 分 A 成两半并且 A 是连通的. 这说明 $d(p, q)<2r$; 于是, 由于相似三角形, $u<2d(c, x)$. 同样, $v<2d(c, x)$. 把这些估计放在一起,就得出

$$|P_x - P_c| < 10\,r d(c,\ x).$$

所以，如果给定一数 $\epsilon>0$，取 $\delta=\epsilon/10r$，则对于每一 $x\in N(c, \delta)$，都有 $|P_x-P_c|<\epsilon$。证毕。

习　　题

1. 两个薄煎饼放在同一个圆形案板上，一个恰是正方形而另一个恰是圆形．切一刀把这两个饼的每一个正好分成两半．描述这个切法．
2. 对于任意两个正多边形形状的薄煎饼，"中心线"方法能行得通吗？
3. 用垂直的一对直线能把一个正方形薄煎饼分成四个相等部分；问这种切法有多少种？
4. 在用垂直的一对直线把任意的薄煎饼分成四等份时，已证明当 x 描出 $90°$ 圆弧时，函数 P_x-Q_x 有一次是零．说明当 x 描出整个圆时，这结果并不蕴涵至少有四个这样的分法．
5. 如果一个薄煎饼是圆的，而另一个是不规则的，给出一个直接的论点(不同于书中的)，来证明存在着单独的一条直线，把两个煎饼都切成两半。
6. 在定理 11.1 中，把直线形的刀代之以半圆形的刀，这半圆形的半径等于包含这两区域的圆 C 的直径．类似于命题(1)，考虑半圆圆心在以 z 为起点并过 x 的射线上的切割．用这种类型的刀来切，论点在何处失效？用什么类型的弯曲的刀，这论点成立？

12. 多项式的零点

下一个定理是主要定理在代数学上的应用。

定理 12.1　一个实系数的奇次多项式至少有一个实零点。

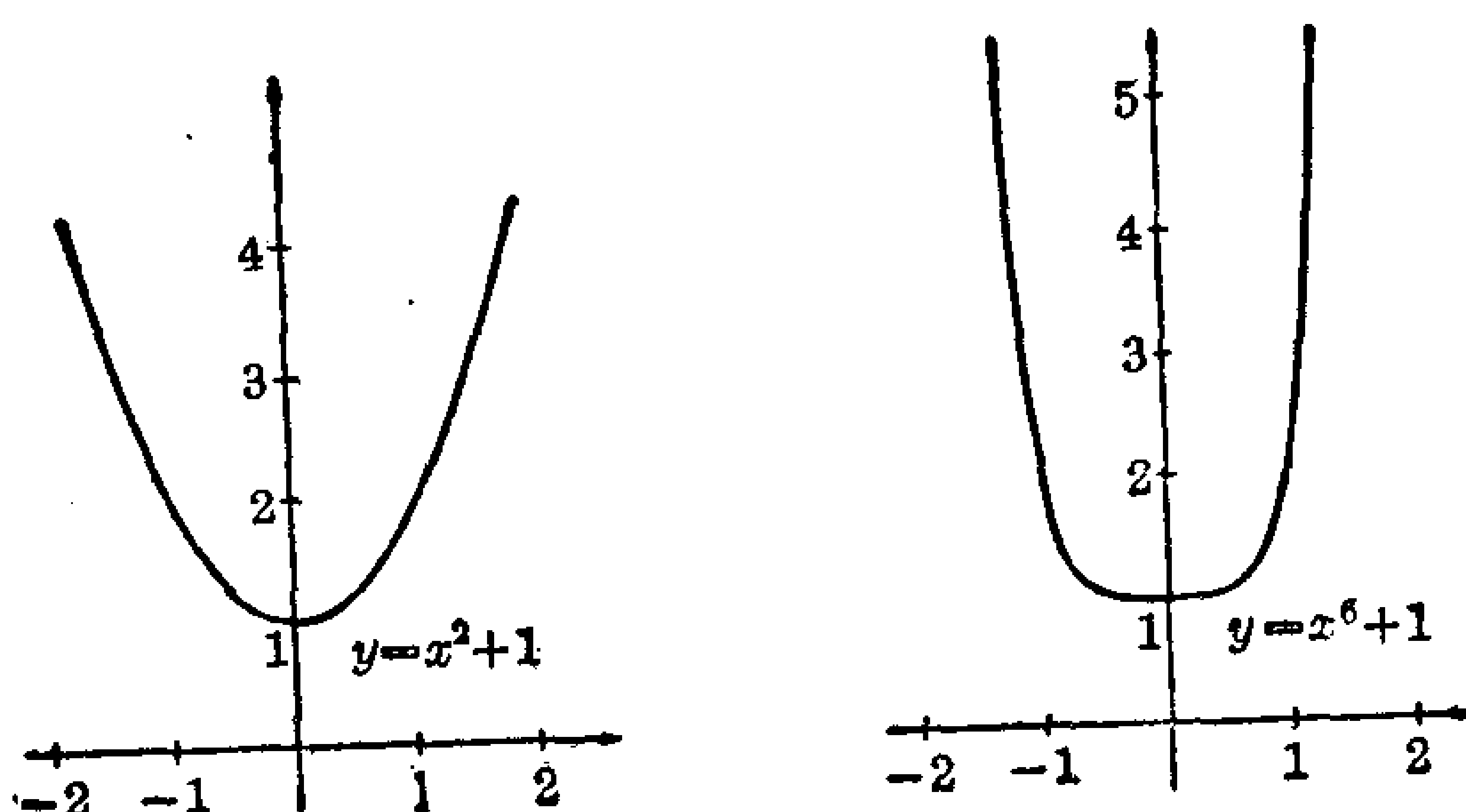


图 12.1

要领会这定理的含义，让我们观察偶次多项式与奇次多项式的一些特例．首先，若多项式为一次，$fx=ax+b$，$a\neq0$，则 $y=ax+b$ 的图形是一条直线，它交 x 轴于 $x=-\frac{b}{a}$，所以多项式以 x 的这个值为零点．其次，考虑抛物线 $y=x^2+1$，作为二次多项式的一个例子(看图 12.1)．这曲线完全位于上半个坐标平面内．x^2+1 的最小值是 1，因为对于任何实数 x，$x^2\geqslant0$；因而多项式没有实零点．同样，x^6+1 没有实零点；x^4-2x^2+5 也没有，因为

$$x^4-2x^2+5=(x^2-1)^2+4$$

决没有一值小于 4(看图 12.2)．另一方面，偶次多项式 x^2-4x+3 有实零点 $x=1$ 与 $x=3$(看图 12.3)．

$y=x^3-x+5$ 的图形是图 12.4 中所示的曲线：它在 -2 与 -1 之间的某处穿过 x 轴．多项式 x^5-2x^3+x+4 的次数为 5；它的图形如图 12.5 所示，在 -1.7 与 -1.6 之间的某处穿过 x 轴．

在我们的例子中，每一个奇次多项式的图形从 $-\infty$ 上升，穿过 x 轴，最后趋向 $+\infty$．偶次多项式的图形从 $+\infty$ 下

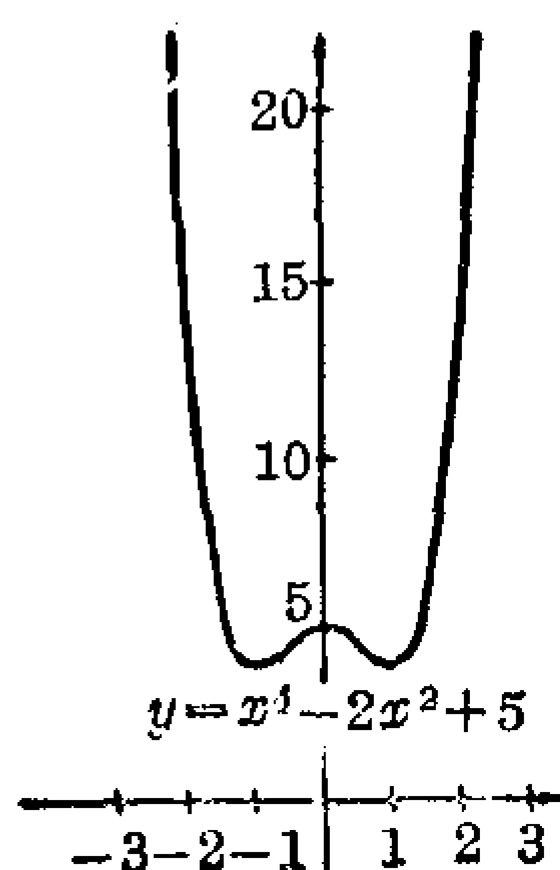


图 12.2

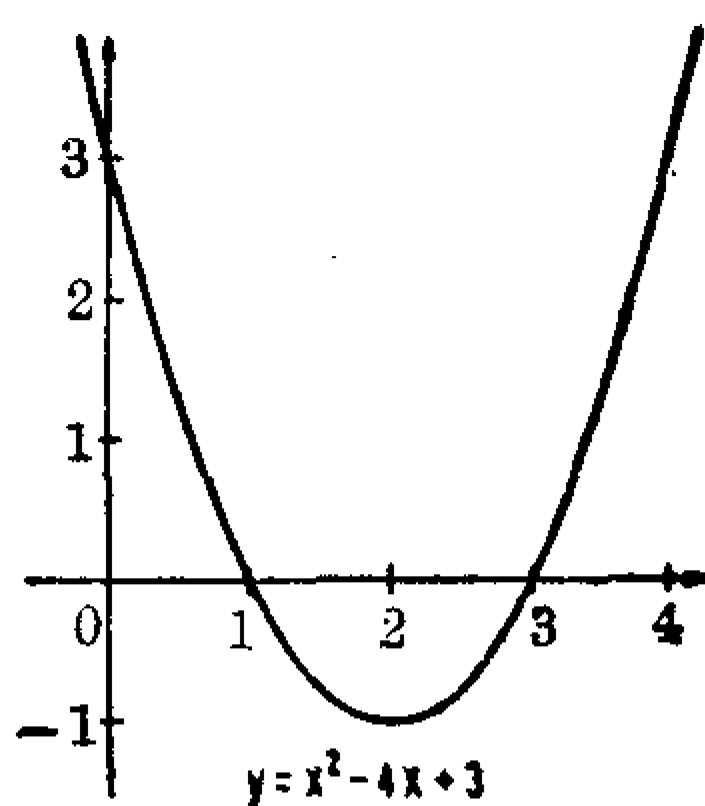


图 12.3

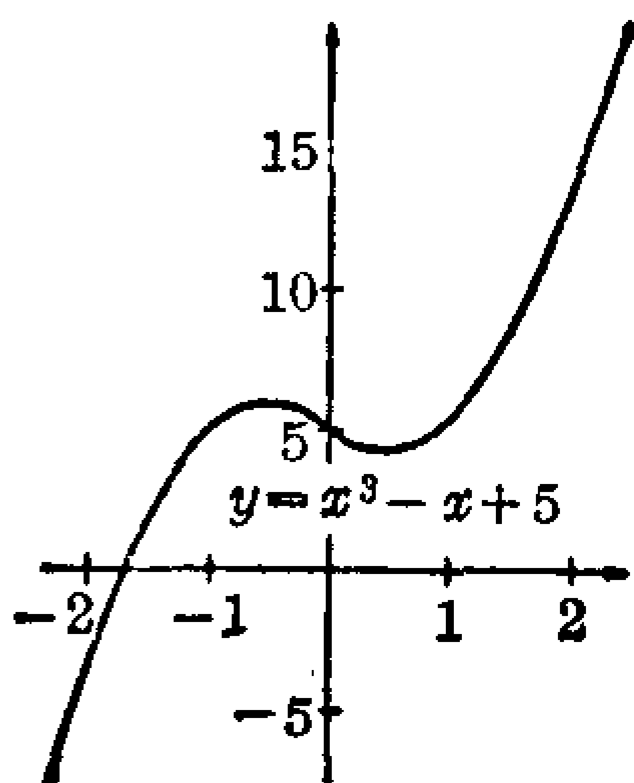


图 12.4

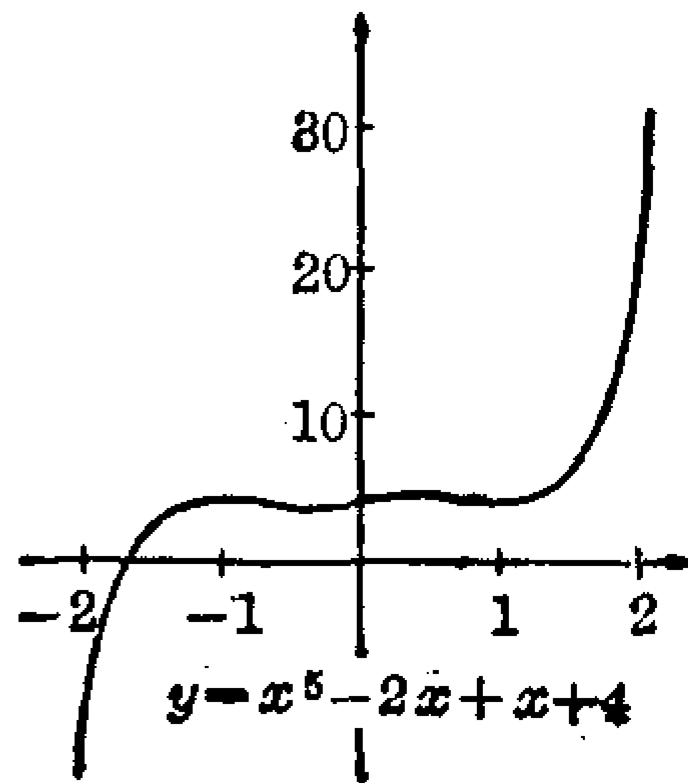


图 12.5

降，再回升到 $+\infty$，其间可能有一些摆动，在我们的例子中，有些从不穿过 x 轴．定理 12.1 的要点是：奇次多项式决不会这样；每一个实系数的奇次多项式至少有一个实零点．

要证明定理 12.1，只需要考虑形如

$$f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$$

的多项式．因为如果最高次项的系数不是 1，能用这系数的倒数遍乘多项式的每项而不至于改变多项式的零点．对于 $x\neq 0$，可以把 $f(x)$ 写成

$$x^n\left(1+\frac{a_1}{x}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{x^{n-1}}+\frac{a_n}{x^n}\right),$$

或 $f(x)=x^n q(x)$，其中

$$q(x)=1+\frac{a_1}{x}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{x^{n-1}}+\frac{a_n}{x^n}.$$

我们证明的方法在于说明奇次多项式 f 在某些 x 处是负的，在另外一些 x 处却是正的，并且是连续的。于是从主要定理就会获得所寻求的结论。

如果 x 是这样一个数，使得

$$\frac{a_1}{x},\ \frac{a_2}{x^2},\ \cdots,\ \frac{a_n}{x^n}$$

的每一项的绝对值小于 $1/n$，那末这 n 项的和

$$h(x)=\frac{a_1}{x}+\frac{a_2}{x^2}+\cdots+\frac{a_n}{x^n}$$

的绝对值小于 $n/n=1$；这就是说 $h(x)$ 是介于 -1 与 $+1$ 之间，又因为 $q(x)=1+h(x)$，$q(x)$ 是正的．为着找出使这成立的一个数 x，先看

$$n|a_1|,\quad (n|a_2|)^{1/2},\quad \cdots,\quad (n|a_n|)^{1/n},$$

中的每一个数，选出比它们都大的一个数 b．要说明对于一个使 $|x|\geqslant b$ 的 x，$q(x)$ 是正的，只需用到下列事实：不等式

$$|x|>n|a_1|,\ |x|>(n|a_2|)^{1/2},\ \cdots,\ |x|>(n|a_n|)^{1/n}$$

蕴涵 $$\left|\frac{a_1}{x}\right|<\frac{1}{n},\ \left|\frac{a_2}{x^2}\right|<\frac{1}{n},\ \cdots,\ \left|\frac{a_n}{x^n}\right|<\frac{1}{n}.$$

对于使 $|x|\geqslant b$ 的 x 值，多项式的符号就是 x^n 的符号，因为 $f(x)=x^n q(x)$ 而 $q(x)$ 是正的．因为 n 是奇数，x^n 具有 x 的符号．于是 $x=b$ 时多项式是正的，而 $x=-b$ 时多项式是负的。

要应用主要定理来断定 $-b$ 与 b 之间存在一个零点，必须证明多项式是一个连续函数．在第 3 节中已指出任一常数函数（即零次多项式）与任一恒等函数（即一次多项式）都是连

续的．在下面的习题 2 中，要求证明连续函数的积是连续的．从而 $x^2=x\cdot x$ 连续，$x^3=x^2\cdot x$ 连续，并且由归纳法，对于每一个 k x^k 都连续．因为 x^k 与常数 a 都连续，同一结果告诉我们任一单项式 ax^k 连续．每一个多项式是它的诸单项式的和，而连续函数的任何和仍连续（见第 3 节的习题 8 与答案）；所以每个多项式连续．

习　题

1．证明多项式 x^2 是一连续函数．

2．证明两个连续函数 f 与 $g:[a,\ b]\to R$ 的乘积是连续函数，［提示：

$$|(fx)(gx)-(fx')(gx')|=|(fx)(gx-gx')+(fx-fx')(gx')|$$
$$\leqslant|fx||gx-gx'|+|fx-fx'||gx'|.]$$

3．什么因素决定一个 n 次多项式在 $x=0$ 处的正负号？

4．利用判别准则 $|x|>(n|a_k|)^{1/k}$ 求出一数 b，使得多项式 $f(x)=x^3-2x^2-3x$ 在 $x>b$ 时是正的，而在 $x<-b$ 时是负的．把这多项式分解成线性因式以求出最小的数 a，使得在 $x>a$ 时 $f(x)>0$，以及最大的数 c，使得在 $x<c$ 时 $f(x)<0$.

5　利用判别准则 $|x|>(n|a_k|)^{1/k}$ 求出一数 b 使得多项式 $x^5-3x^4+125x^3+200x^2-x+2$ 在 $x>b$ 时是正的，而在 $x<-b$ 时是负的．（注意：习题 4 中的三次多项式容易分解成线性因式，但本题中的五次多项式就不然．）

第 二 编

二维时的存在定理

13. 平面的自映射

在引言中已提到，第二编的目的是证明一对联立方程的解的存在定理。这个定理在第18节中叙述，它的证明在第26节中完成。第27节一直到第36节是应用这定理到映射的不动点、向量场的奇点以及多项式的零点等问题上。为了提出这主要定理，必须发展第一编的一维概念的二维类似。所需的关键概念是平面中一闭曲线围绕不在该曲线上一点的圈数。我们将首先给出这概念的一个直觉定义连同主要定理的一个直观证明(第17，18节)。在第19—26节中再使定义精确，证明严密。

记住，第一编的主要定理讨论的是从一线段到一直线的映射 $f:[a, b]\to R$，还给出点 $y\in R$ 所应满足的条件，使得在这条件下能断言 y 是在象 $f[a, b]$ 中(即 $fa\leqslant y\leqslant fb$)。第二编的主要定理将讨论从平面 $P(=R^2)$ 的一部分 D 到 P 的映射 $f:D\to P$，并给出能断定一点 $y\in P$ 在象 fD 中的条件[†]。

---

† 在引言中我们说过本定理是讨论一对联立方程 $f(x, y)=a$ 与 $g(x, y)=b$ 的；这形式现转变为目前的形式，因为我们用记号 (x_1, x_2) 替换了 (x, y)，用 (y_1, y_2) 替换了 (a, b)，用 (f_1, f_2) 替换了 (f, g)，并且把数对 (x_1, x_2)，(y_1, y_2) 作为 P 中点 x, y 的坐标。

还应记住，我们看到 $f:[a, b]\to R$ 的图形这一概念在说明主要定理的意义以及在几何直观地揭露它的真实性方面都非常有用. 在二维空间中我们也可以谈映射 $f: D\to P$ 的图形. 但必须注意它牵涉到这样一个事实：平面 $P=R^2$ 的一个点由两个实数 (x_1, x_2) 表示，它的 f 象需要另两个，(y_1, y_2). 于是这点以及它的象所组成的这一对点由四个数表示，并且图形上的一个点是四维空间的一点. 这样，f 的图形是 R^4 中的一个曲面.

这里是我们遇到的第一个困难. 用图形说明我们的定理，需要我们具有能看出四维空间中一个曲面的能力(我们没人有此能力). 所以我们必须采取一种不同的看出映射的方法：如同第一编第 2 节中所简述的用图表示象以及原象的方法. 在这一节的其余部分中，我们将用同样的方法来讨论较复杂的映射. 我们的意图是加强几何直观，并指明后续各定理的一般性程度.

在第一编第 2 节中我们讨论了平移、旋转、反射以及相似变换作为平面的自映射. 一个较复杂的映射是：它在一个方向放大长度而在另一方向缩小之. 图 13.1 说明一个映射 f，它使水平方向的长度扩大一倍而使垂直方向的长度缩小一半. 显然它改变了角与形状. 它把一圆映成一椭圆. 惊奇的是它把任一直线映成直线.

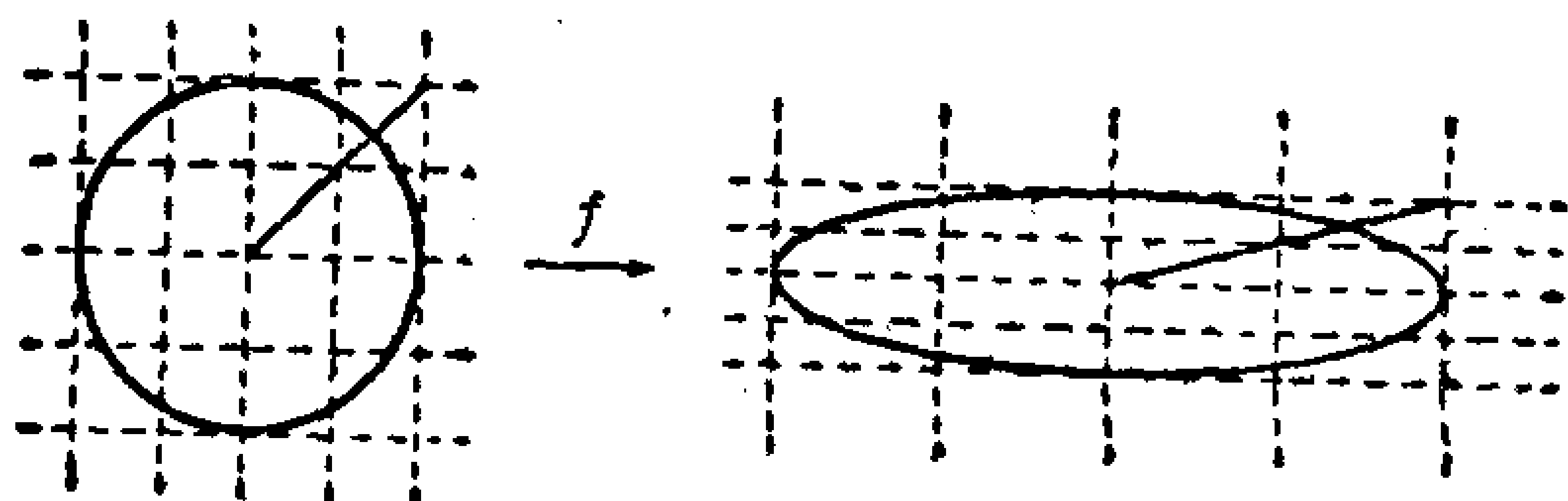


图 13.1

图 13.2 说明一个剪切变换 $P\to P$. 设想有一个格子栅拦，是用许多水平的与铅垂的长而窄的木条作成的，水平木条与铅垂木条的每一交点处用一个钉子钉着. 这样一个结构不是刚体的，而在手指碰着它时，它就能回转，作一个剪切变换. 一个剪切也把圆映成椭圆，把直线映成直线.

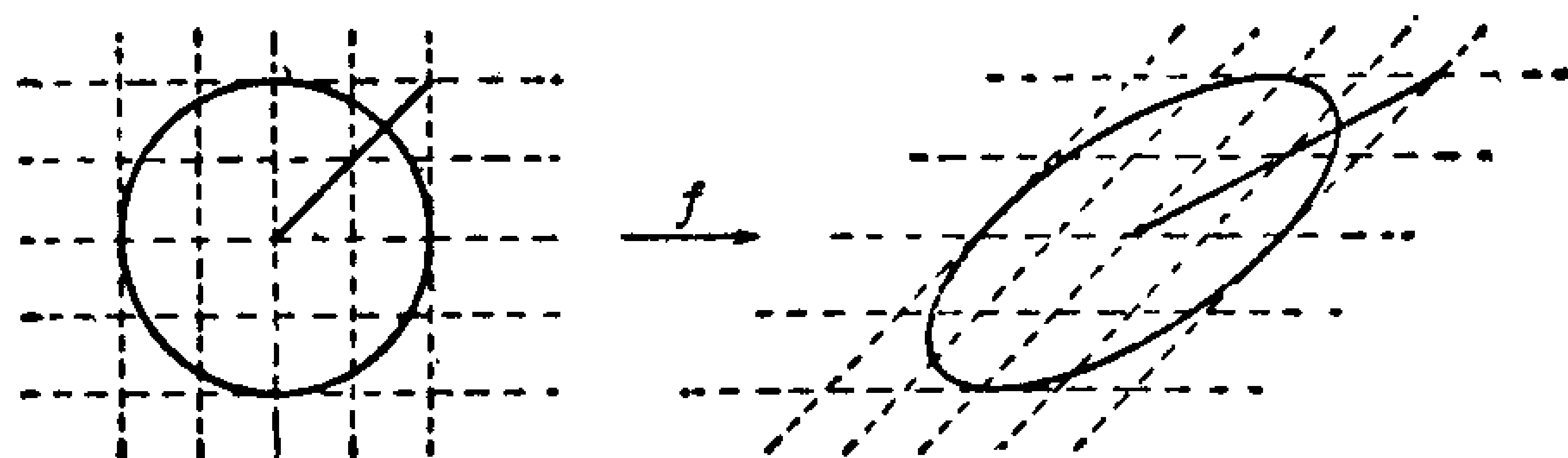


图 13.2

直到现在为止，所考虑的映射都是一对一的. 我们也要考虑不是一对一的映射. 图 13.3 表明沿着 P 的一条直线把 P 简单地折叠起来. 沿着折叠线，这映射是一对一的，但在折叠线上部的每一点是平面的两个不同点的象.

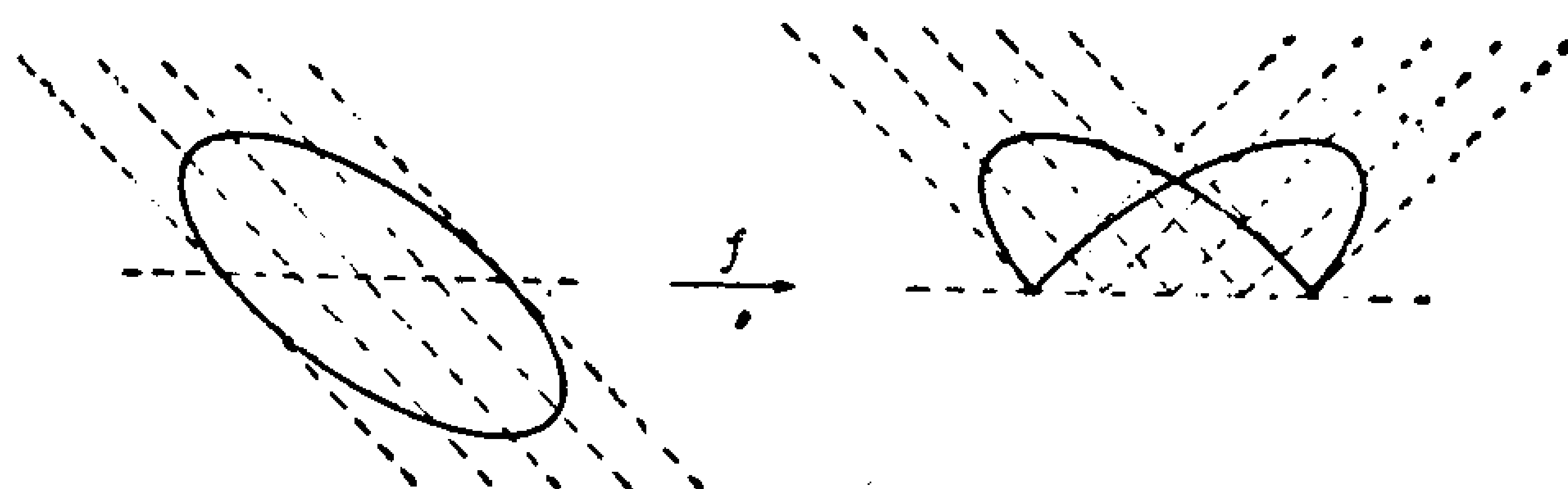


图 13.3

图 13.4 说明一平面盖满它自身两次的一种映射. 中心点 z 映成它自身. 射线 L 的每一点也固定. 每一条以 z 为起点的射线刚体地映成一条以 z 为起点的射线，但后者与 L 的夹角两倍于前者与 L 的夹角. 考虑一条以常角速度绕 z 旋

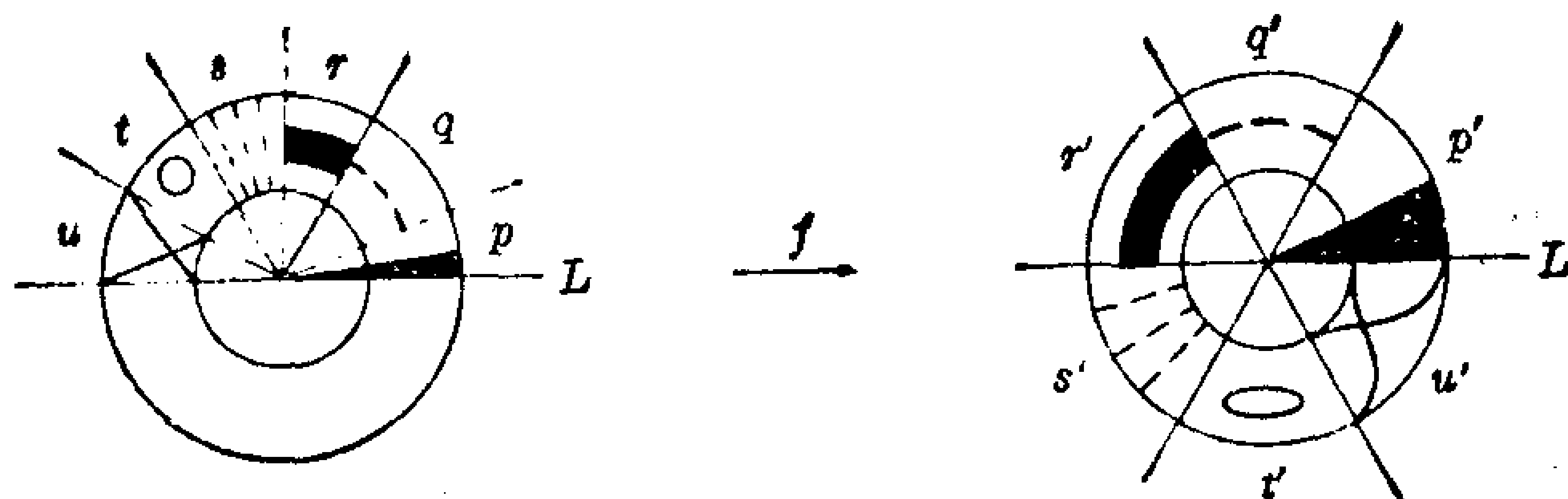


图 13.4

转的射线；它的象是用两倍于这速度绕 z 旋转的射线. 当第一条射线绕过半转时，它的象完成一个整圈. 把 z 除外，这个映射是 2 到 1 的. 每一个以 z 为中心的圆围绕自身两次. 用一个整数 n 乘角速度，就得出一个类似的映射. 它是 n 到 1 的，z 除外.

还有更复杂的映射：把 P 缠绕 P 无限多次. 图 13.5 就表示出这么一个映射. 水平线 L 映成单独一个点 z，而每条铅垂线刚体地映射成过 z 的一条直线. 当铅垂线以常速度沿水平方向移动时，它的象以常角速度绕着 z 旋转. 此图只显示出 180° 的旋转. 这个映射是 ∞ 到 1 的. z 的原象是一整条直线 L. 任何其它点的原象由两排孤立的点组成，一排在 L 之上而另一排在 L 之下，一排中每对相邻的点都等距.

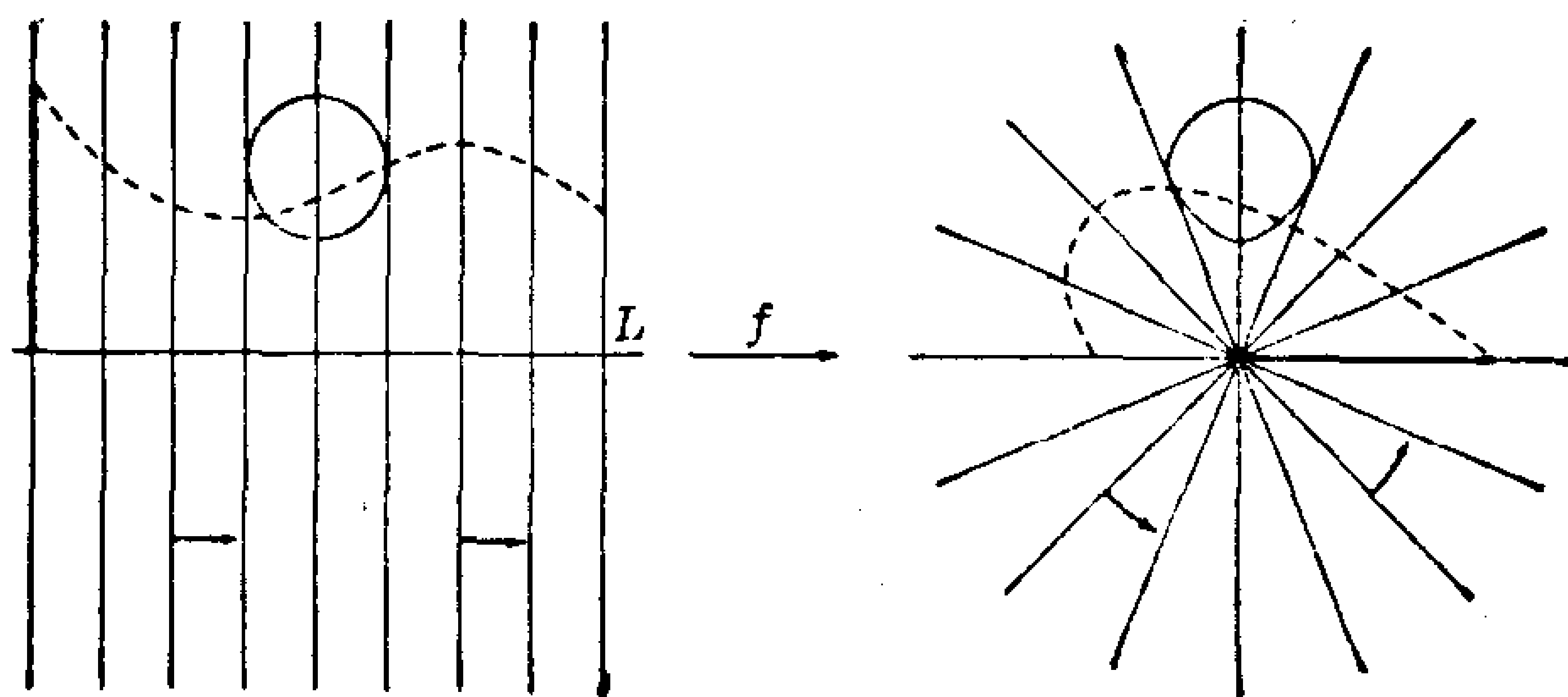


图 13·5

能够用几句话明确地描述的映射，通常都太简单，远不能说明一般情形下的映射的复杂性．图 13.6 说明一个较复杂的映射．我们不详细地描述它，只说：它把一族同心圆映射成一族 8 字形；P 的象正好是 P 在两条射线所围区域中的那一部分．直观地说，P 的象可以看作是沿着一条直线抖出来的一串同心圆，其中的每个圆还都同时扭弯成 8 字形．

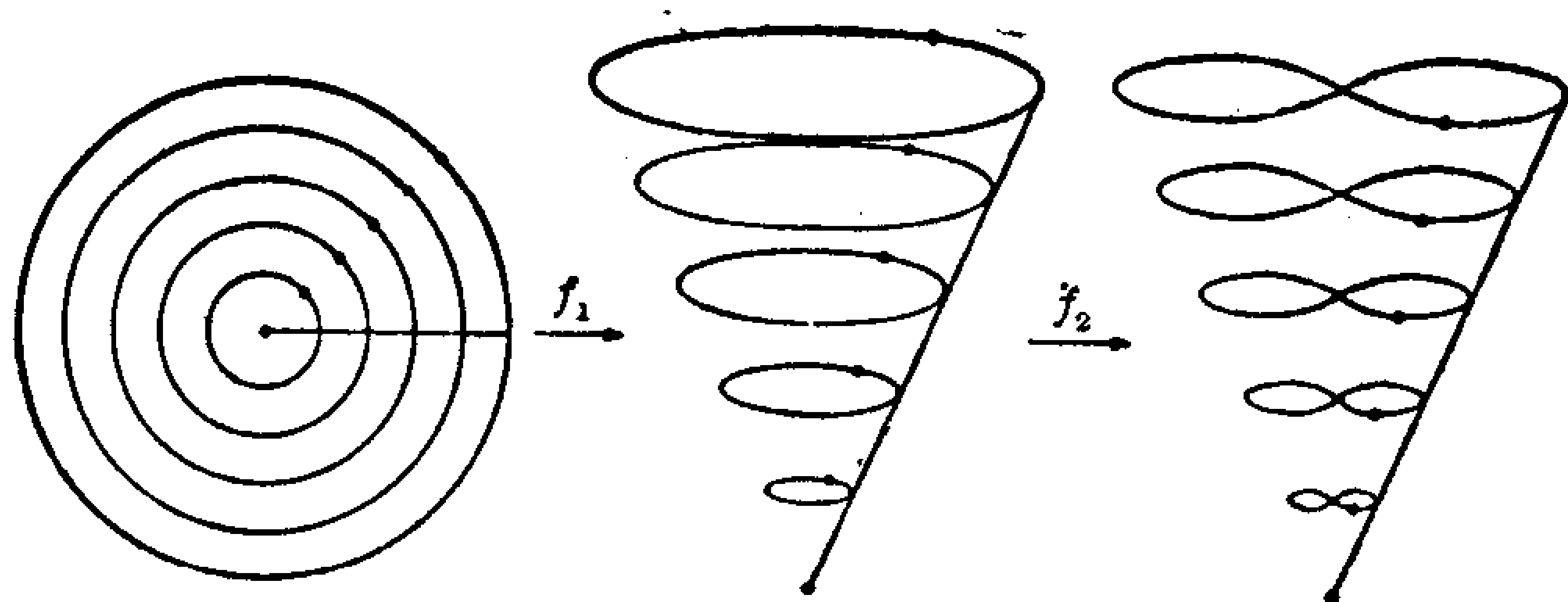


图 13.6

习　　题

1．用下面两个映射来复合成映射 $f:P\to P$．设想 P 是桌子上铺开的一张无穷大的纸，纸上又放了一根无穷长的圆柱形 Q，P 上的 x 轴与 Q 的轴平行．首先把平面 P 卷成 Q，使得与 x 轴平行的直线与 Q 的轴平行；其次，把 Q 垂直投影到 P．描述在 f 作用下(a)，(b)，(c)，(d)的象：

(a) 平面 P，　　　　(b) 水平直线 $y=$常数，

(c) 铅垂直线 $x=$常数，　(d) 斜直线．

(e) 描述一点的原象．

2．令 P 为通过球 S 中心的平面．作 $f: P\to P$ 如下，首先从极 p 作球极平面射影 $P\to S$，然后作从 S 回到 P 的垂直射影．描述(a) P 的象，(b)P 中一直线 L 的象，(c)fP 的一点的原象．

3　如果 f 是前面的图 13.5 的映射，描述下列(a)，(b)，(c)的象．

(a) 一条铅垂直线，

(b) 与直线 L 距离为 r 的一条水平直线，

(c) 一条斜直线.

(d) 只考虑 f 的定义域中的那部分 P_1，它的 f 象 fP_1 盖满值域的第一圈又半圈. 作略图表明图 13.7 在 P_1 中的原象.

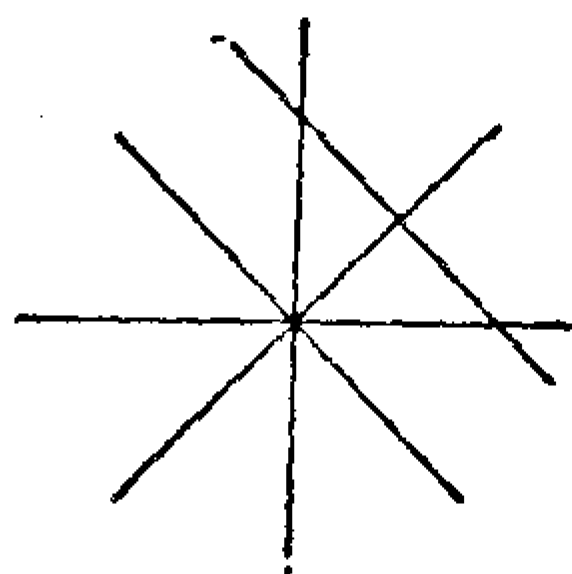


图 13.7

14. 圆 片

在一维空间诸定理的叙述与证明中，区间是一个重要角色. 对于二维空间的定理，圆片将起类似的作用. 我们规定：平面中一圆 C 与它的内部的并集叫做一个圆片 D. 圆 C 叫做 D 的边界. 圆片 D 由它的中心 z 与它的半径 r 确定. 点在圆片中如果它与 z 的距离小于或等于半径；也就是，$x\in D$ 指的是 $d(x, z)\leqslant r$.

我们已注意到，任两区间是相似的，所以是拓扑等价的；任两圆片 D 与 D' 也如此. 如果 D 与 D' 的中心不是同一点，则可以把 D' 平移到与 D 有同一中心的 D'' 处. 于是，在 z 处一个适当的放大或缩小将把 D'' 映成 D.

在一维时，直线的任一子集若与一区间拓扑等价，则这子集本身是一个区间，因为它必须是紧致的、连通的. 但在平面中就有许多很不相同的子集与一个圆片拓扑等价. 例如在一个剪切变换下，一圆片能映成一椭圆与它的内部. 图 14.1 说明一圆片映成一简单闭曲线与它的内部的一个拓扑映射. 中心 z 映成 z'，而 D 的每条径向线段 zy 由一相似变换(放大或缩小)映成平行线段 $z'y'$. 对于任何凸多边形，例如三角形或

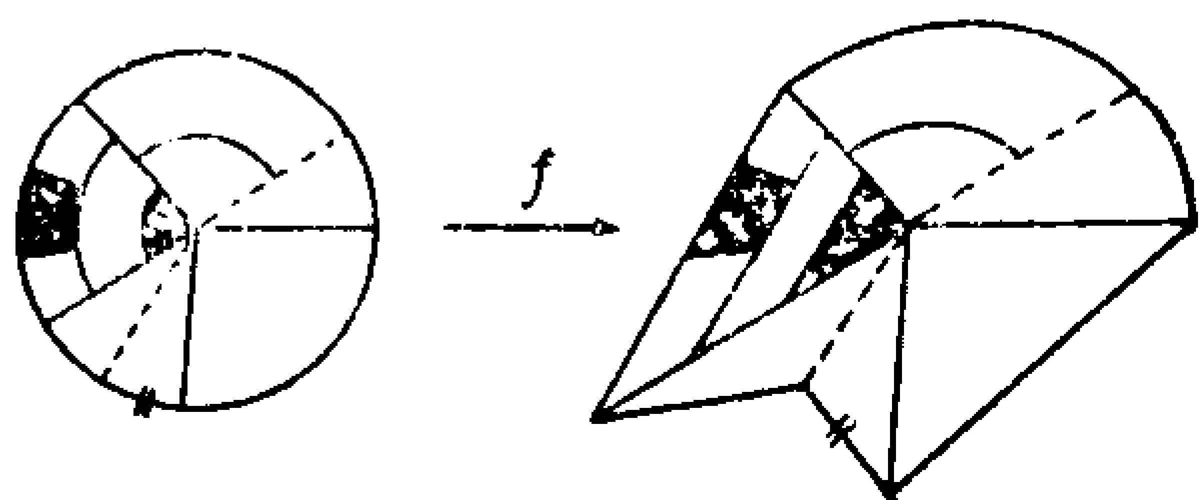


图 14.1

矩形，也可以用同样的办法.

在第二编的定理中，能把圆片这个名称解释为，与圆片拓扑等价的这些图形中的任一个. 但因为圆片的对称性以及易于描述，我们宁愿选择它来代表其它拓扑等价的图形.

圆片 D 当然是有界集，因为它处于任一个以它的中心为中心而半径较大的圆之内. 它也是一个闭集，因为它的补集的每个点有一个邻域不与 D 相遇；事实上，若 y 不在 D 内，则 $d(y, z)$大于 D 的半径，从而半径为 $r'=d(y, z)-r$ 的 y 的圆邻域就不包含 D 的点. 因为 D 是闭的而且有界，从而 D 是一紧致集. 于是，在任一映射 $f:D\to P$作用下，象 fD 是紧致的，所以是闭而有界的.

对于 D 的任意两点，连接它们的线段也在 D 中. 所以 D 是一个连通集. 于是，对于任一映射 $f:D\to P$, fD 是连通的.

习 题

1. 如果把一圆片沿一直径切成两半，试证那包含直径的闭的半个圆片与一圆片同胚. 推断出：与一圆片同胚的任何空间也与这半个圆片同胚.
2. 如果 D 是一圆片而 C 是它的边界圆，试证能把任何同胚 $g: C\to C$ 扩张成一同胚 $f:D\to D$.
3. 如果 A 与 B 为 P 的两个子集，它们都与一个圆片同胚，又如果

$A\cap B$ 是每个边界曲线上的一段弧，试证 $A\cup B$ 与一圆片同胚.

4. 图 14.2 的诸图形中，哪些与一圆片同胚?

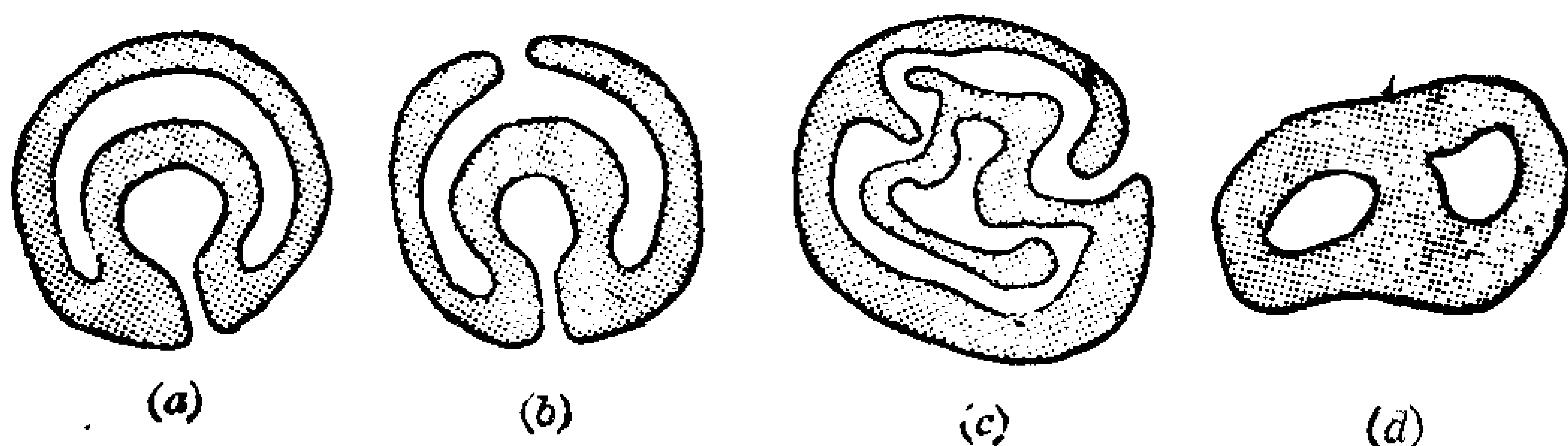


图 14.2

5. (a) 如果把图 14.2 的最后一个图形，在 A 处切掉了一细窄条如图 14.3 所示，问这剩下的集合是否与一圆片同胚? (b) 在 A, B 与 C 处剪切的哪一种组合会给出圆片的同胚象? (c) 如果一个图形有三个洞，需要多少剪切来给出圆片的同胚象?

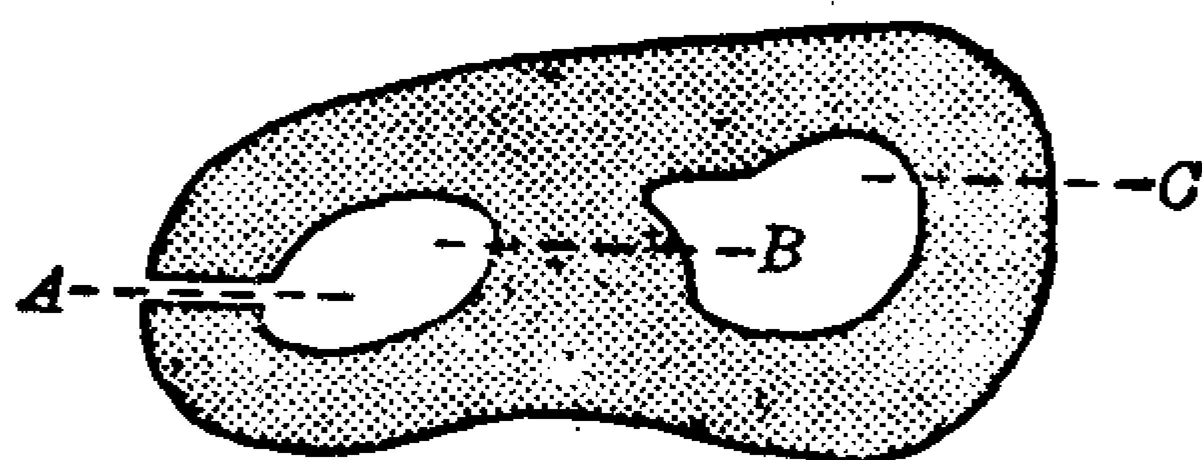


图 14·3

15. 主要定理提法的初步尝试

二维时的主要存在定理类似于一维时的主要定理. 它说：如果 $f:D\to P$ 是从圆片到平面的映射，则对于满足一定条件的每一点 $y\in P$，方程 $fx=y$ 有一个解 $x\in D$. 这个条件的提法颇为复杂. 我们将先提出几个简单而貌似合理的条件，然后说明它们为何不够恰当；经过这么几个阶段来获得明确提法.

在一维的定理中，D 是闭区间 $[a, b]$，y 所满足的条件是

它介于 fa 与 fb 之间。这里 a 与 b 为区间端点，并且把区间与直线的其余部分分开。在圆片的情形，D 的最外边的点是边界圆 C 的点，而 C 把 D 与平面的其余部分分开。于是要提出的条件可以说成 y 以某种方式与 fC 有关。说"y 介于 fC 间"，这明显是胡扯。如果把一维时的条件改说成：要求 y 被 fa 与 fb 包围着，这跟"介于 fa 与 fb 之间"有同样意义，而二维时的类似语"y 被 fC 包围着"却有了直观的意义。让我们试着确切地提出这个说法。作为尝试的第一步，考虑"y 是以 fC 为边界的圆片的一点"。这不恰当，因为对于许多映射 f 来说，fC 不是一个圆。它很容易是一椭圆或一矩形。作为第二步尝试，考虑"y 是以 fC 为边界的区域的一点"。这比较好些，但排斥了 fC 是 8 字形这种可能情形。作为第三步尝试，试用"y 是某个有界区域的一点，这区域的边界包含在 fC 中"。在我们检查一下图 15.1 所示的一个 $f:D\rightarrow P$ 的例子之前，这说法似乎是所需要的。映射 $f:D\rightarrow P$ 最好用从左到右所画出的几步来描述。首先，把 D 拉成一长的窄条 E。其次，把 E 弯成一弯曲形状的 F，它象加厚了的一个圆的四分之三。最后，把 F 继续往下弯，到两端重迭在最后的图形 fD 中为止。标出的点 y 不在 fD 中，可是它属于一个有界区域，其边界在 fC 中。

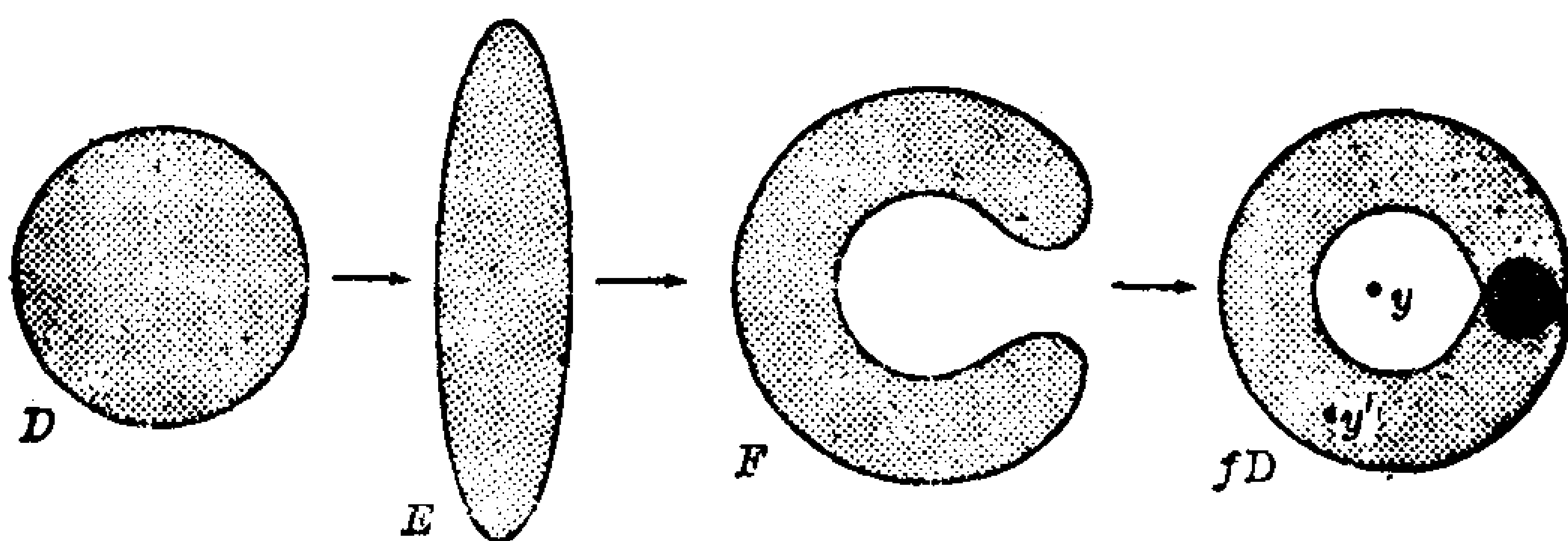


图 15.1

最后这个例子清楚地显示出我们必须克服的困难. fD 中标以 y' 的点与 fC 有什么关系,而点 y 却没有这种关系? 答案的提法用到我们将要发展的一个新概念: **曲线围绕一点的围绕数**. 我们将看到 $f|C$ 围绕点 y' 的圈数不是零,而它围绕点 y 的圈数是零. 这就是为什么 $fx=y'$ 有一个解 $x\in D$, 但 $fx=y$ 却无解.

习 题

1. 用一例来说明,对于一点 y 所加的下述条件不能保证 $y\in fD$: 如果 z 是 D 的中心,则 y 与 fz 在 $P-fC$ 的一连通子集中.

16. 曲线与闭曲线

在这以前, "曲线"这个词指的是连续函数 $f:[a, b]\to R$ 的图形. 现在我们需要在下列比较广的意义下用这个词. 平面中一条**曲线**定义为从实数的某个区间 $[a, b]$ 到平面 P 的一个映射 $\varphi:[a, b]\to P$. 每一数 $t\in[a, b]$ 可以看成时间的一瞬间,对应点 $\varphi t\in P$ 可以看成一动点在时刻 t 的位置. 于是一条曲线可以当作一动点走出来的**道路**. 特别是任何一条曲线有一个定向, 意思是选定沿曲线从 φa 到 φb 的方向为正向. 这是随着时间增加的运动方向. 画曲线的图形时, 用箭头表示定向, 如图 16.1 所示. 注意,我们容许一条曲线自交; 即动点能在几个不同时刻通过同一点. 再者, 动点也可以在一段时间内保持静止. 例如, 把整个区间 $[a, b]$ 映成单独一点的常值函数就是我们意义下的一条曲线. 如果一条曲线的起点和终点是同一点, 即 $\varphi a=\varphi b$, 它就叫做**闭曲线**.

在 P 中, 从一点 A 到一点 B 的线段 L 可以表示为一曲

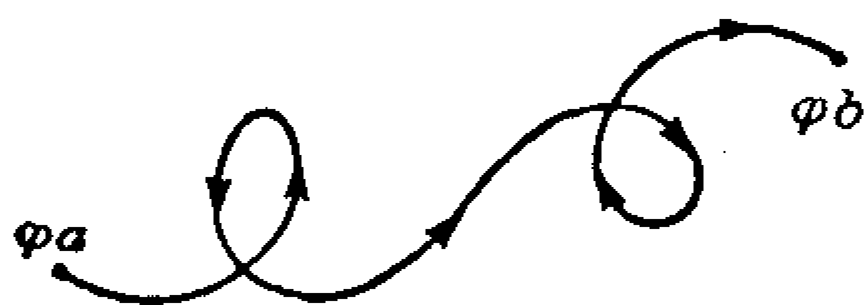


图 16.1

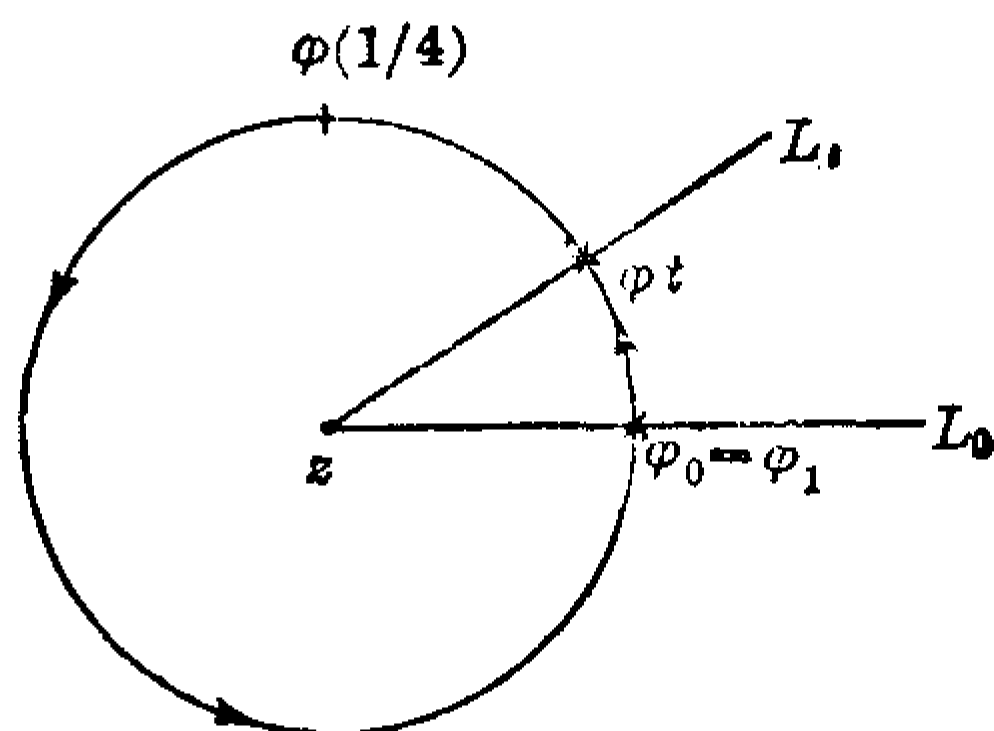


图 16.2

线. 记住, 任两线段总是相似的. 所以, 如果 $\varphi: [a, b] \to L$ 是相似变换, 使 $\varphi a = A$ 与 $\varphi b = B$, 则 φ 定义一条曲线, 它的象是 L. 这例子中的动点具有常速度.

连续函数 $f: [a, b] \to R$ 的图形是一条曲线. 我们只要对于每个 $t \in [a, b]$, 令 φt 是坐标为 (t, ft) 的点即可. 这种类型的曲线既不自交, 也不是闭的, 因为 $t_1 \neq t_2$ 蕴涵 φt_1 与 φt_2 这两点有不同的横坐标.

任一圆 C 按下述标准方式可看作是一条闭曲线. 令 z 表示 C 的中心并令 L_0 表示从 z 出发的一固定射线(包含起点的半直线). 对于 $t \in [0,1]$, 定义 φt 如下: $\varphi 0$ 是 L_0 与 C 的交点, φt 是 C 的这样一点, 使连接 z 到 φt 的线段与 L_0 在 z 处的交角是 $360t$ 度. 例如 $\varphi\left(\frac{1}{4}\right)$ 是在 $90°$ 处的点 $\left(\text{绕圆}\ \frac{1}{4}\ \text{圈处}\right)$. (看图 16.2.) 因为整个圆有 $360°$, 我们有 $\varphi 1 = \varphi 0$. 在这个情况下, 动点也有一个常速度.

矩形的边界同样可以看作是一条闭曲线. 取一区间 $[a, e]$, 用 $a < b < c < d < e$ 的数 b, c, d 把这区间 $[a, e]$ 分成四个子区间. 命矩形的四个顶点按照同样顺序为 A, B, C, D. 如同上例, 能定义 φ 使得它把区间 $[a, b]$, $[b, c]$, $[c, d]$ 与 $[d, e]$ 分别映成线段 AB, BC, CD 与 DA. 曲线是闭的, 因

为 $\varphi a=A$ 与 $\varphi e=A$.

我们用图作的说明，可能会使人们倾向于把一曲线 φ 看作不过是象集 $\varphi[a, b]$；这却是误解。故必须强调指出曲线是映射 φ. 例如，把圆看作是闭曲线，就有无穷多的标准表示法，L_0 的每一选择就有一个表示。

习　题

1. 设以 r 为半径的一个车轮沿着一条单轨滚动而不滑行，轮子中心描出一条平行于路轨的直线. 试画出下列各点经过的道路:
   (a) 轮子外圈上的一点;
   (b) 与轮子中心距离为 $r/2$ 的一点;
   (c) 与轮子中心距离为 $5r/4$ 的一点.
2. 如果 $f:[a, b]\to P$ 与 $g:P\to P$ 都连续，证明 gf 是一条曲线.
3. 如果 $f:[0, 1]\to[a, b]$ 是使 $f0=a$ 与 $f1=b$ 的相似变换，求出 $t\in[0, 1]$ 时 ft 的公式. 给出另一个这种映射的公式，它不是相似变换.

17. 围绕数的直观定义

令 $\varphi:[a, b]\to P$ 为一闭曲线，令 y 为平面 P 的不在曲线上的一点，对于区间中的每个 t，令 L_t 表示从点 y 开始并通过 φt 的射线. 当 t 从 a 变到 b 时，点 φt 描出这曲线，而射线 L_t 绕着它的固定端点 y 旋转。因为曲线是闭的，L_t 最后回到它的初始位置 $L_b=L_a$. 所以这射线在运动的全过程中，围绕着 y 旋转了若干个整圈. 整圈的个数叫做闭曲线 φ 在点 y 处(或围绕 y)的围绕数，并用简单记号 $W(\varphi, y)$ 来表示这个数. 通常约定，反时针方向旋转时这个数是正的，顺时针方向旋转时是负的。

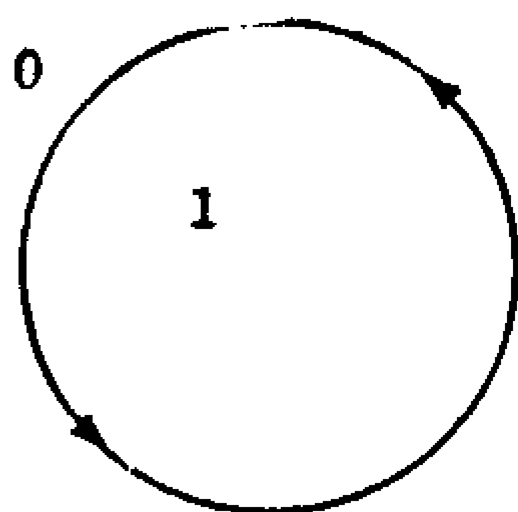


图 17.1

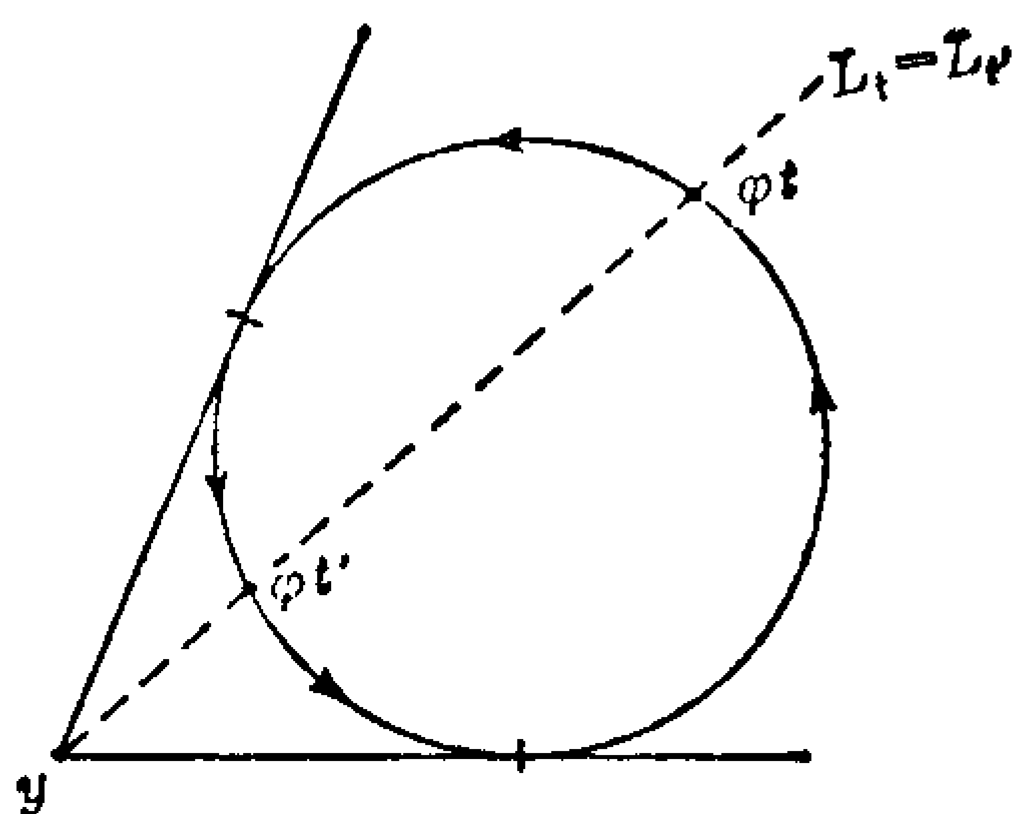


图 17.2

在图 17.1 中，把圆看作 16 节所述的一条闭曲线，它围绕它的中心一次．它也围绕圆内任一点一次．但是它围绕圆外任一点的围绕数是零．设 y 是圆外任一点．以 y 为起点的射线中恰有两条与这圆相切，它们小于 $180°$ 的夹角包含这个圆．当 φt 描出这个圆时，固定在 y 处的射线 L_t 扫过平面夹在两切线之间的部分．L_t 先向一个方向扫去；达到一边界(切于圆的射线之一)后就逆转方向，结果是未旋转完一次就回到它的初始位置(见图 17.2)．

在图 17.3 中，闭曲线是沿顺时针方向描出一次的一个椭圆．对于它内部的任一点，围绕数是 -1，而对于它外部任一点，围绕数是零．

图 17.4 是一条 8 字形的闭曲线．它在一个有界区域内部的每一点处的围绕数都是 1，而在另一个有界区域内部的每一点处的围绕数却是 -1．当然在无界区域内的每一点处

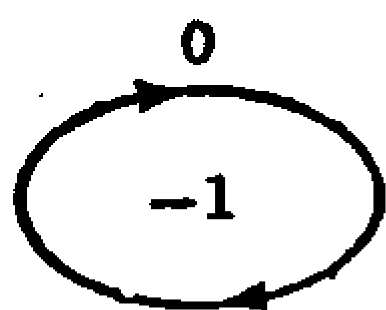


图 17.3

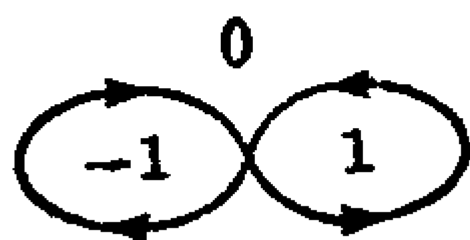


图 17.4

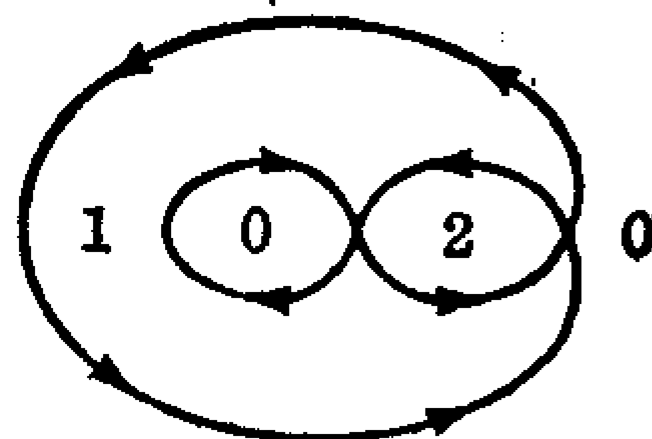


图 17.5

的围绕数都是零．

图 17.5 表示在 15 节中所讨论的例子． 在此例中，存在一有界区域，在其内的点处，曲线的围绕数是零．对于另两个有界区域，围绕数是 1 与 2． 注意，在同一个连通集的两点处，围绕数总是同一个数．

图 17.6 表示常值函数所给出的常曲线（全部只单独的一点）．它围绕每个其它的点零次．

本书封面上的图表示一条闭曲线，它在它的每一个补域的每一点处的围绕数如图所示．

图 17.7 指出可能性是无止境的．

0.

图 17.6

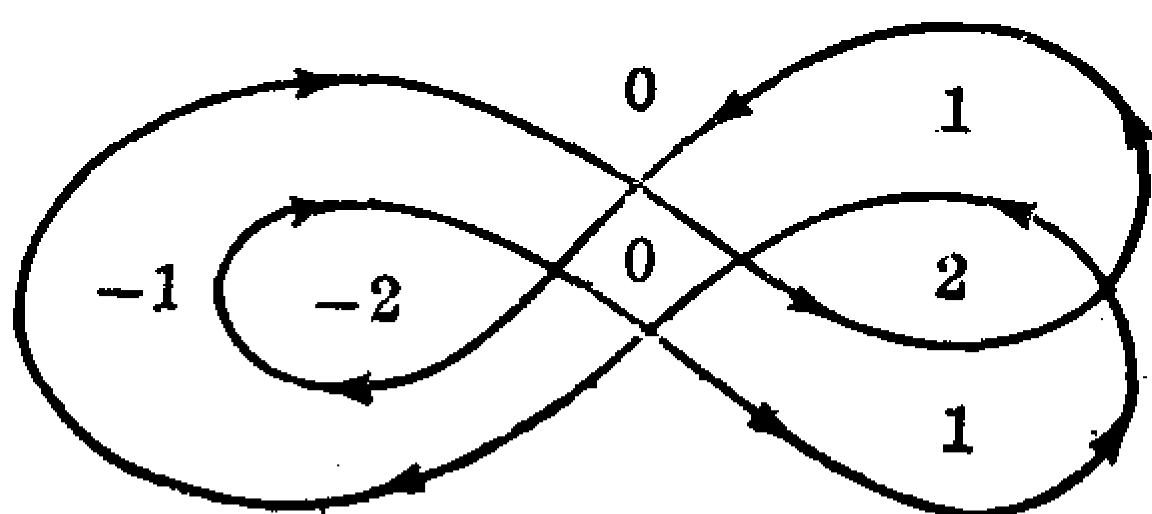


图 17.7

现在令 C 为一圆，令 $f:C\to P$ 为从 C 到平面的一映射．令 φ: $[0, 1]\to C$ 为把 C 看作 16 节所述闭曲线时的标准表示法． 于是复合函数 $f\varphi$: $[0, 1]\to P$ 仍是一闭曲线，因为 $\varphi 0=\varphi 1$ 蕴涵 $f\varphi 0=f\varphi 1$． 设 y 是 P 中不在 fC 上的任一点，这曲线在 y 处有一围绕数．这叫做 f 在 y 处的围绕数，并用 $W(f, y)$ 表示．

习 题

1．在图 17.2 中，设圆 C 的半径为 r，设点 y 与圆心的距离为 $r\sqrt{2}$．当 φt 从一个切点到另一个切点描出 C 的外凸的那段弧时，射线 L_t 转过的是什么角？ 当 φt 继续沿内凹的圆弧运动时，射线 L_t 转过的

是什么角？

2. 在图 17.8 中，闭曲线在 P 中的补集包含 7 个连通区域，用 A, B, C, D, E, F, G 表示．对于每个区域，说出该闭曲线在该区域的一点处的围绕数．

3. 对于图 17.9 的闭曲线，回答与上题同样的问题．

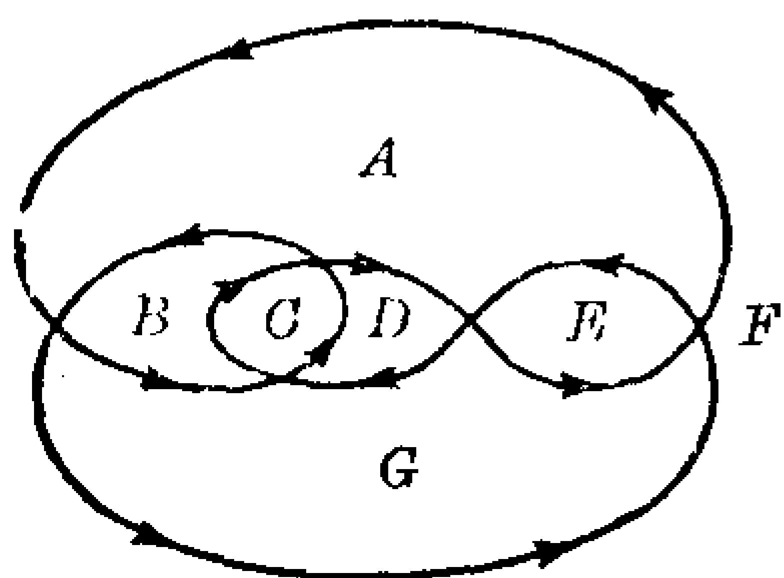


图 17.8

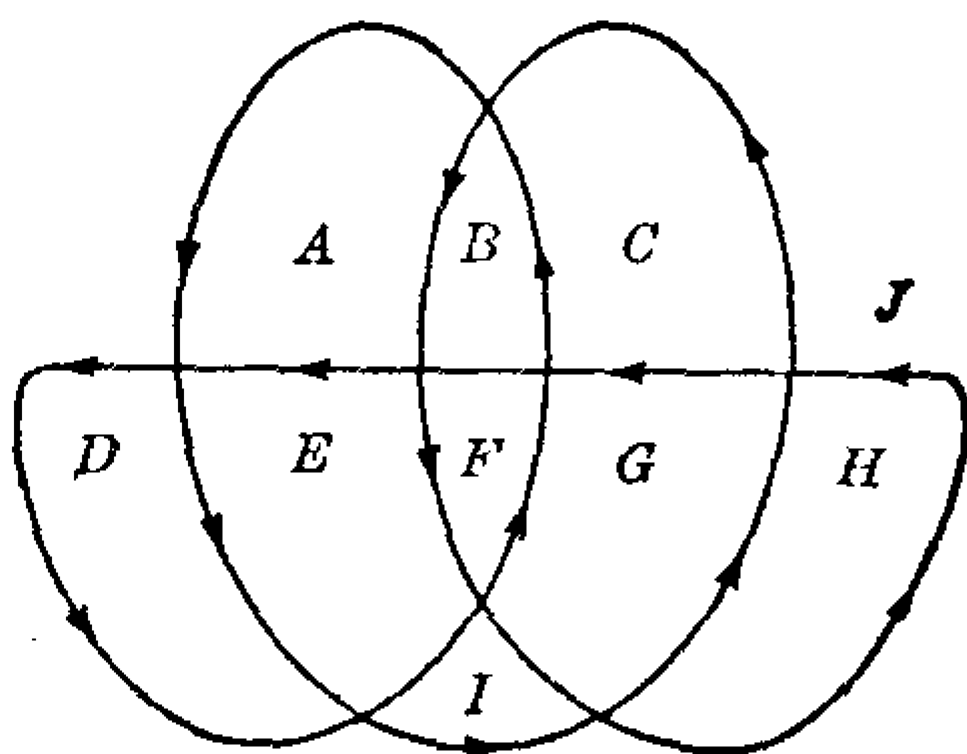


图 17.9

18．主要定理的陈述

利用围绕数这个概念，现在就能确切提出第二编的主要定理．

定理 18.1 设 $f:D \to P$ 是从一圆片到平面的映射，C 是 D 的边界圆，并设 y 是平面中不在 fC 上的一点．如果 $f|C$ 在点 y 处的围绕数不是零，则 $y \in fD$；也就是说，存在一点 $x \in D$，使得 $fx = y$．

下面是一个简短的直观证明．设 C 的半径是 r，中心是 z．对于每一个 s, $0 \leqslant s \leqslant r$，用 C_s 表示以 s 为半径的、C 的同心圆；于是 $C_r = C$，C_0 是中心 z．设 y' 是平面上不在 fD 中的一点．则对于 $[0, r]$ 内的每一个 s，y' 不在 fC_s 上，因为

C_s 是在 D 中，因而对于 $[0, r]$ 内的每一个 s，围绕数 $W(f|C_s, y')$ 有定义．把它简写为 $W(s)$．考虑当 s 从 r 下降到 0 时的全体闭曲线 $f|C_s$．这族闭曲线从 $f|C$ 开始，最终缩成常数曲线 $f|C_0$，即缩成点 fz．因为 $f|C_s$ 随着 s 的不断减小而逐渐变化，从而 $W(s)$ 是 $s\in[0, r]$ 的一个连续函数．围绕数 $W(s)$ 怎样变化呢？答案是：根本不变，因为 W 是 s 的连续函数，而 $W(s)$ 的每个值必是一整数；不可能从一个整数值跳到另一个整数值而不经过其间的非整数值（参看第一编的主要定理）．于是对于所有的 s，$W(s)$ 有同一个值；特别是 $W(r)=W(0)$．但 $W(0)=0$，因为 $f|C_0=fz$ 是常数函数所给出的闭曲线．所以对于不在 fD 中的每个点 y'，$f|C_r$ 在 y' 处的围绕数是零．从而 $W(f|C_r, y)\neq 0$ 蕴含着 y 是在 fD 中；而说 y 在 fD 中就是说存在一个 $x\in D$ 使 $fx=y$.

在图 18.1 的说明中，要想看出上述论点是怎样引进的，只要看一看 s 递减的几个阶段中的闭曲线 $f|C_s$．$f|C_r$ 有两叶（看图 15.1 中的 fD，图 18.1 中的粗曲线 $f|C_r$）；一旦这两叶分开（例如，图中画出的第三条闭曲线），y 明显地在这个

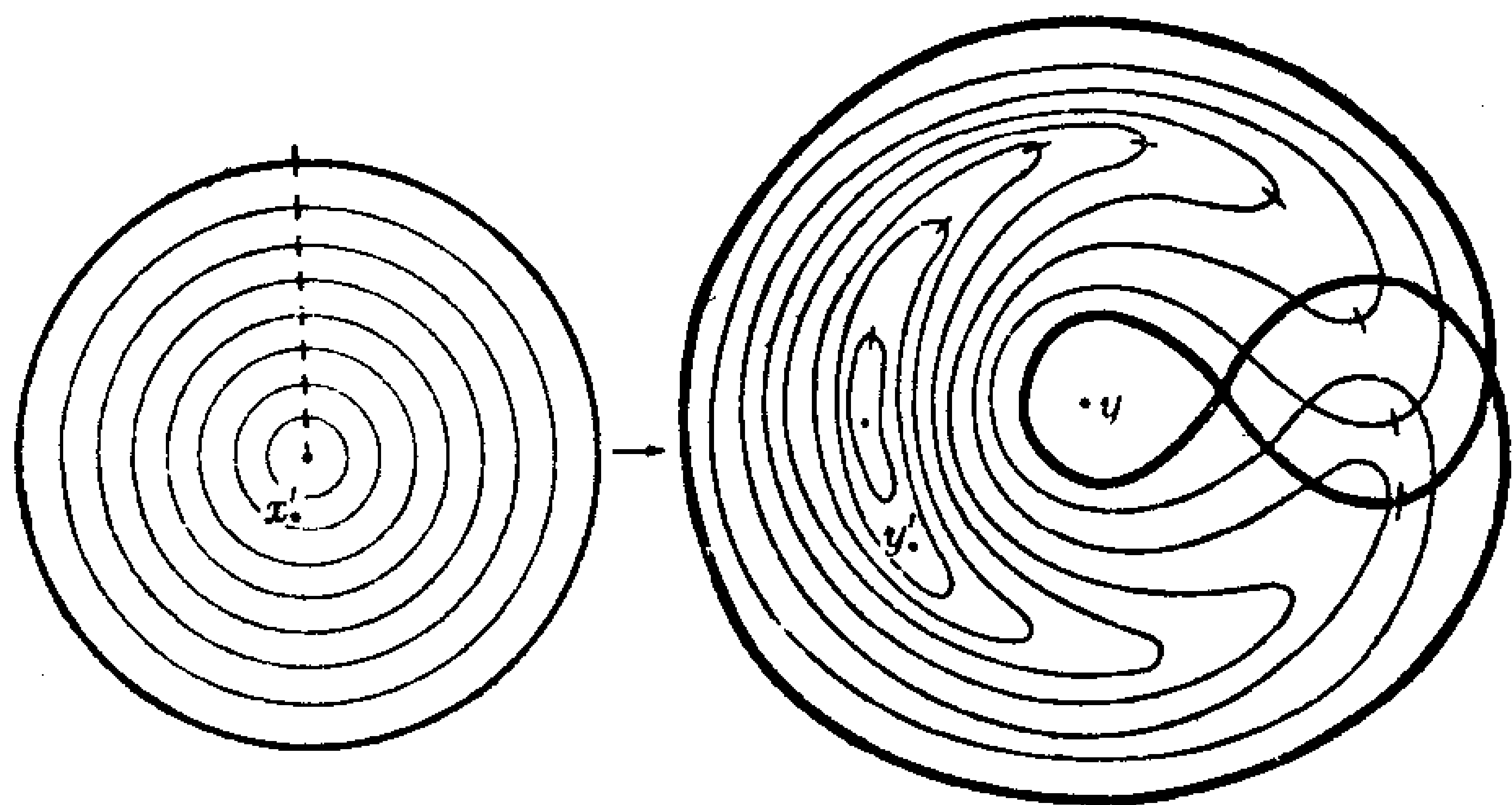


图 18.1

闭曲线之外，从而在 y 处的围绕数为零。注意，这与图 17.5 所示结果一致。

习　　题

1. 如果在第 17 节习题 2 中的闭曲线是映射 $f:D\to P$ 的 $f|C$，补域 $A, B, \cdots$中哪几个必在 fD 中？
2. 对于第 17 节习题 3 中的闭曲线，回答类似的问题。
3. 设平面的一个自映射 $f:P\to P$ 是沿圆片一直径的简单折迭。
   (a) 边界圆 C 的象是什么？圆片的象是什么？
   (b) 在圆片的象中的点 y 的围绕数 $W(f|C, y)$是什么？

19. 什么时候论点算不了证明？

绝大多数人在看完并且理解了前两节中的论点之后，都认为论点有说服力，定理已是真理，无需再加什么来获得一个完整的、合乎逻辑的证明。但是细心的读者会发现论证上的缺陷。主要的缺陷发生在第 17 节；没给出围绕数的一个精确定义。在那一节里，当 t 从 a 变到 b 时，射线 L_t 绕着它的起点 y 究竟旋转多少个整圈，留待直观去决定；这是假设了我们的眼睛能跟着旋转的射线并把它的运动总数加成单一个旋转圈数。大家知道，眼力在这种场合并非完全可靠；例如，足够快地映出一串静止画面时，会使我们产生一个错觉，认为是在看连续的动作。

好在数学概念与推理并不依赖于我们看见动作的能力。我们必须处理的是静止的情形。我们有一条闭曲线 φ，有不在这曲线上的一点 y，我们想要赋予 y 与 φ 一个整数叫做围绕数，使得这名称符合于我们的直观看法。这将在以下七节中去做。如果读者要尽早看一些新概念和新应用，不准备停

留在已勾划出来的概念的细致发展，他应该跳到第 27 节，而删去以下的七节.

在我们集中注意力到 $W(\varphi, y)$ 定义的细节之前，我们要指出，为完成主要定理的陈述与证明，只需要

(1) 精确地定义 $W(\varphi, y)$,

(2) 在第 18 节的直观证明中所用的 φ 的那种变化下，证明它是连续的，以及

(3) 证明只要 φ 是常值闭曲线，就有 $W(\varphi, y)=0$.

如果我们采取的定义是：$W(\varphi, y)=0$ 对于全体 φ 与 y，那么这个定义自然满足(1)，(2)与(3)三个要求，所以主要定理的证明对于这个 W 有效；但是定理的结论什么都没说，因为不存在点 y 使 $W(f|C, y)\neq 0$. 于是，为着使得我们的努力不是白费，还要增加下述的要求：

(4) 对于某些曲线 φ 与点 y，$W(\varphi, y)$ 应该不是零；特别是，它应该与第 17 节中直观地定义的围绕数一致.

20. 一曲线所扫过的角

为了提出围绕数的一个良好定义，首先考虑"一曲线 $\varphi: [a, b]\to P$ 在一点 y 处所扫过的角"这个更一般的概念. 我们将分两步来定义这个角的大小 $A(\varphi, y)$：先对特殊类型的曲线，后对任意的曲线.（除非另有声明，我们都用度数来量角而略去度的记号°.）于是我们将看出，一条闭曲线所扫过的角，其大小必是 360 的倍数，而用这个倍数来定义围绕数 $W(\varphi, y)$：

$$W(\varphi, y)=\frac{A(\varphi, y)}{360}.$$

有一种特殊类型的曲线，即，由所谓短曲线组成的曲线，我们能很容易而明确地定义它们在曲线外一点 y 处的 $A(\varphi, y)$。称 φ 关于不在 φ 上的点 y 是短的，如果存在一条射线 L，它以 y 为起点并且不交 φ。例如，一个常函数所给出的曲线即点曲线 $\varphi t=z\neq y$ 对于所有 $t\in[a, b]$，它就是关于 y 的短曲线。图 20.1 给出一个稍为复杂的短曲线的例子。当 t 从 a 变化到 b 时，φt 沿曲线从 φa 变化到 φb，而从 y 发出的到曲线上点 φt 的射线从 L_a 旋转到 L_b。令 $\measuredangle L_a L_b$ 表示这个旋转角；因 φ 是短的，这个角内不会包含射线 L（从 y 开始，不与 φ 交）。定义 $A(\varphi, y)$ 为 $\measuredangle L_a L_b$ 的度数；逆时针方向的角是正号而顺时针方向的角是负号。

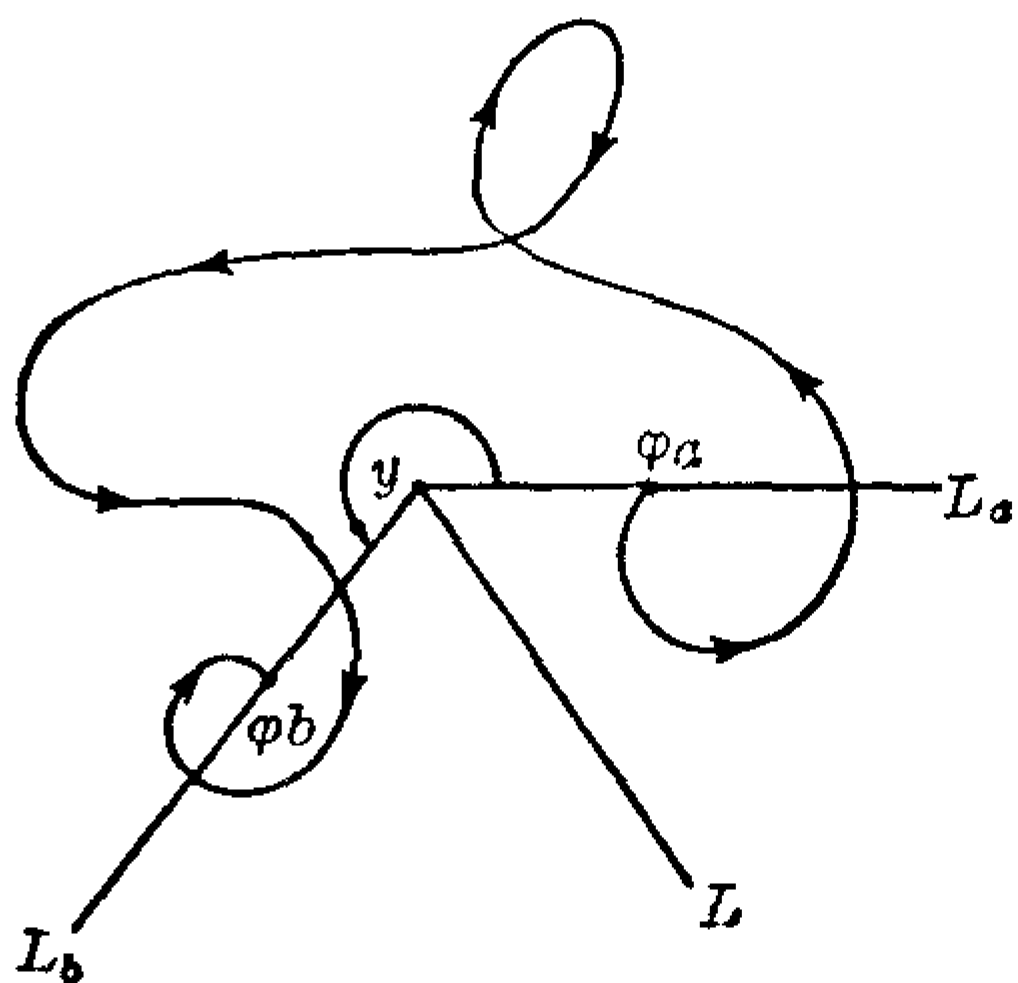


图 20.1

设想我们有一量角器，它的形状是一个整圆周 C 被分成 360 相等的弧，圆周上从一个零点开始依逆时针方向刻出从 0 到 359 的点。我们这样放置 C，使它的中心在点 y 处，而沿射线 L 是零度(即 C 上的零点是 C 与 L 的交点)。令 p_a, p_b 依次表示 C 与射线 L_a, L_b 的交点，又令 x_a, x_b 表示它们在量角器上的相应读数，则 $\measuredangle L_a L_b$ 的度数能由下式算出：

$$A(\varphi, y)=x_b-x_a.$$

注意：这个差 x_b-x_a 不依赖于量角器起始射线的位置，只要这个射线不被包含在所要测量的角 A 之内(看图 20.2)。这一事实可证明如下。假定把量角器旋转一个角度 α 使得它

现在的零度在射线 L' 处．这新的量角器读数是

$$x_a'=x_a-\alpha \quad 与 \quad x_b'=x_b-\alpha,$$

结果
$$x_b'-x_a'=x_b-x_a=A(\varphi,\ y),$$

只要 L, L' 不与作为曲线径向射影像的 C 的这段弧 p_ap_b 相交．容易看出在这些条件下，量角器的读数总是介于0与360之间的数，而差 x_b-x_a 总是在 -360 与 360 之间．在图20.1中，这个差是正的，并且大约是 230．（如果曲线的定向反过来，即如果 φa 与 φb 互换，则 $A(\varphi,\ y)$ 大约是 -230.）

于是公式

$$A(\varphi,\ y)=x_b-x_a$$

唯一地给出由短曲线 φ 在点 y 处所扫过的角的度数．此外，“短”曲线的定义保证了存在一条以 y 为起点的不与 φ 相交的射线 L, L 可以作为我们计算 $A(\varphi,\ y)$ 的量角器的起点；如果有许多这样的射线，选择哪一条作为我们量角器的起始射线都无所谓．

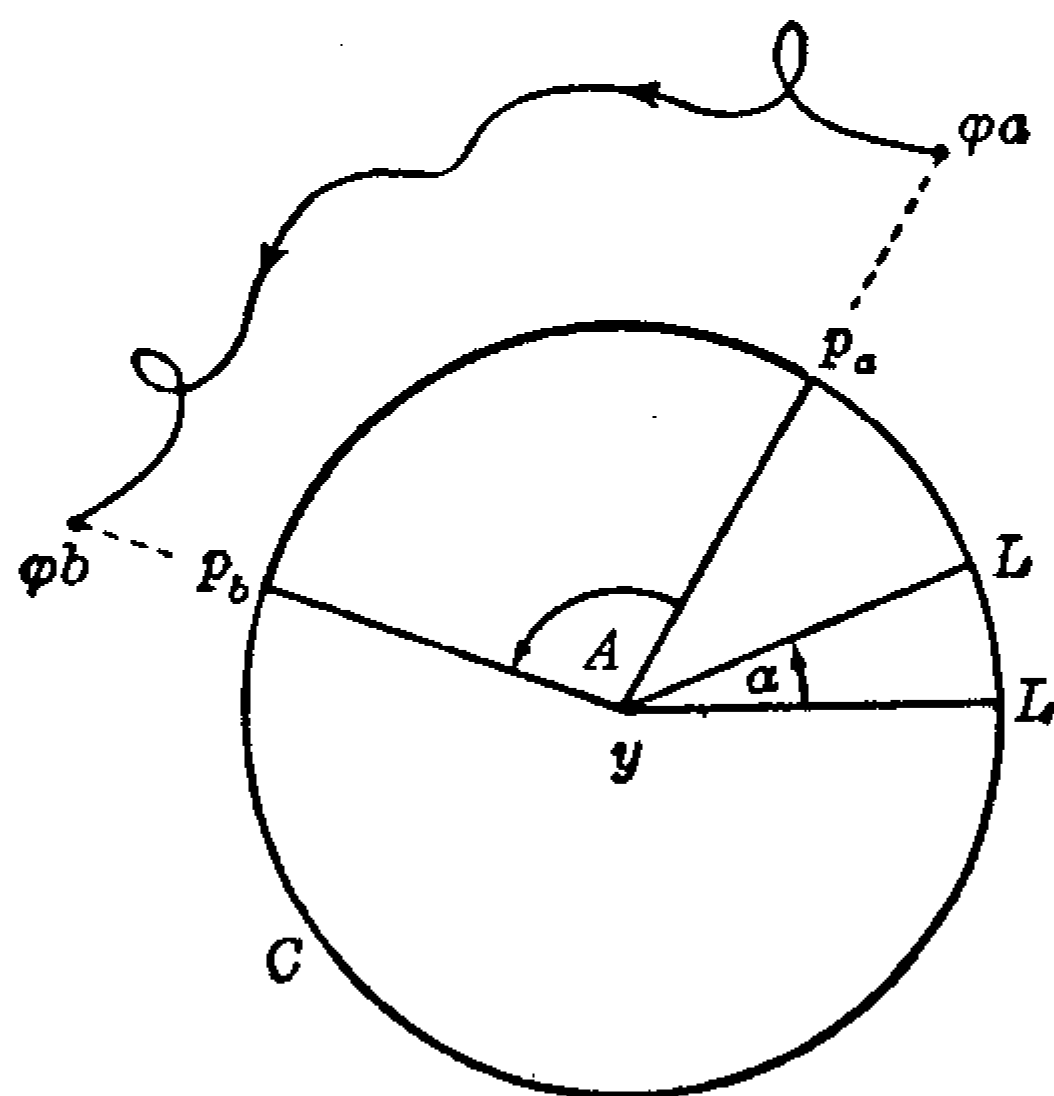


图 20.2

留心我们的定义怎样提供正向与负向运动的相互抵销．例如在图 20.1 中，射线 L_t 开始旋转一个负 30° 角，但又立即转回到初始位置，因而正负相销了．类似地，当点经过曲线顶上的圈时，L_t 旋转角的总和为零．

如果 φ 是一个点曲线，把 $[a,\ b]$ 映成一个单独的点，则 φ 是一短曲线并且 $A(\varphi,\ y)=0$; 因为 $L_a=L_b$, 因而

$$x_a=x_b.$$

函数 $A(\varphi,\ y)$ 有一最重要的性质，叫作关于 φ 的可加性．

令 $a<b<c$ 为实数，又令 $\varphi:[a, c]\to P$ 为关于 y 的短曲线。令 φ_1, φ_2 为 φ 的两部分，其中 φ_1 是 φ 在 $[a, b]$ 上的限制而 φ_2 是 φ 在 $[b, c]$ 上的限制。我们可把 φ 设想为 φ_1 与 φ_2 的并集。显然 φ_1, φ_2 也都是关于 y 的短曲线。选择一条以 y 为起点而不与 φ 相交的射线 L，对于射线 L_a, L_b, L_c 得到它们在量角器上的读数依次为 x_a, x_b, x_c。因

$$x_c-x_a=(x_b-x_a)+(x_c-x_b),$$

故

$$A(\varphi, y)=A(\varphi_1, y)+A(\varphi_2, y).$$

习　　题

1. 在图 20.3 中，有点 u, v, w, x, y, z，问曲线 C 关于哪些点而言是短曲线？

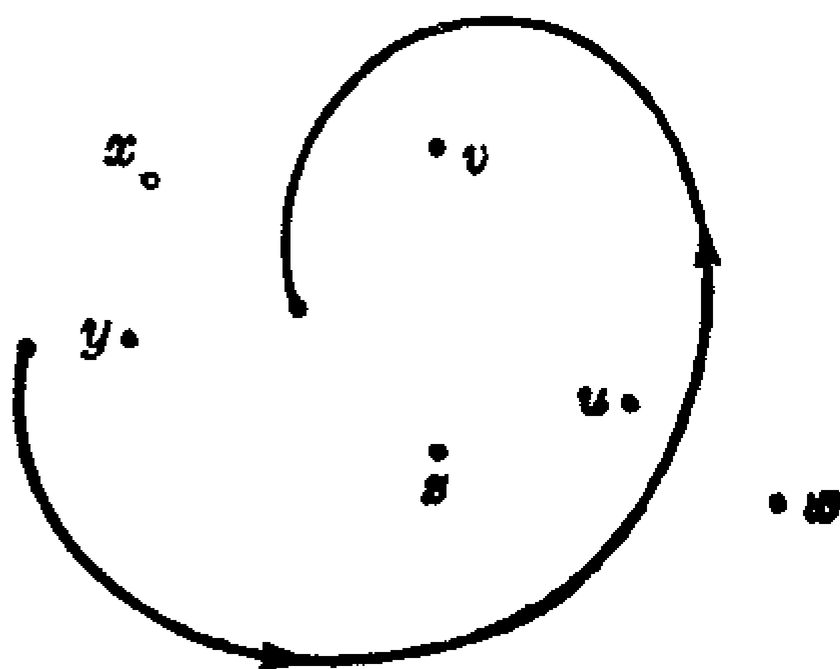


图　20.3

2. 在 C 是短曲线的每一点处，角是多少度？

21. 把一曲线划分成短曲线

如果 $\varphi:[a, b]\to P$ 是一曲线，则把 $[a, b]$ 分成子区间，依次取 φ 在每一子区间上的限制，就可把曲线 φ 分成若干段，这样，φ 就可分解成若干较短曲线的并集。若 φ 不是关于点 y 的短曲线，则会出现这样的情况：在这样一个分解中，φ 的每一

段是关于 y 的短曲线. 于是, 把各段曲线在点 y 处所张角的度数加起来,就可得到 $A(\varphi, y)$的值.

说得更精确些, 把曲线 $\varphi:[a, b]\to P$ 分成一些曲线的并集的分解叫做 φ 的一个划分 $\mathscr{P}$. 组成划分 $\mathscr{P}$ 的首先是数的一个增序列,从 a 开始到 b 为止:

$$a=t_0<t_1<\cdots<t_{m-1}<t_m=b;$$

其次是曲线序列 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_m$, 其中 φ_i 为 φ 在区间$[t_{i-1}, t_i]$ $(i=1, 2, \cdots, m)$上的限制. 如果每一段 φ_i 是关于 y 的短曲线, 我们就说这划分在 φ 外一点 y 处充分地细. 在这种情形下, $A(\varphi_i, y)$的每一个有定义,它们的和用 $A(\mathscr{P}, y)$表示:

$$\begin{aligned}A(\mathscr{P}, y) &= \sum_{i=1}^{m} A(\varphi_i, y)\\ &= A(\varphi_1, y)+A(\varphi_2, y)+\cdots+A(\varphi_m, y). \quad (21.1)\end{aligned}$$

我们要证明两个命题:

1. 如果 φ 是任一曲线而 y 是不在 φ 上的一点, 则存在 φ 在 y 处充分地细的一个划分.

2. 如果 $\mathscr{P}$ 与 $\mathscr{P}'$ 是 φ 在 y 处充分地细的任两划分,则

$$A(\mathscr{P}, y)=A(\mathscr{P}', y).$$

一旦我们证明了这些事实, 就能对于任一曲线 φ 定义 $A(\varphi, y)$如下:

定义 如果 φ 是平面中的一曲线而 y 是不在 φ 上的一点,对于 φ 的所有充分细的划分 $\mathscr{P}$, $A(\mathscr{P}, y)$的公共值是 φ 在 y 处所扫过的角的度量. 这个角用 $A(\varphi, y)$表示, 并可从公式(21.1)算出,右端和式中的每一项由第 20 节的方法算出.

第一个命题告诉我们, 能找到一个划分 $\mathscr{P}$, 使 $A(\mathscr{P}, y)$

有定义．第二个命题告诉我们，这样得出的数 $A(\mathscr{P}, y)$ 不依赖于我们选取的划分，因而它只依赖于 φ 与 y．

1 的证明 在曲线 φ 的任意点 $p=\varphi t$，以 p 为圆心以 $d(p, y)$ 为半径的圆通过 y(看图 21.1)．曲线 φ 在这圆内部的任一段，是关于 y 的短曲线，因为它与从 y 发出的并是线段 py 在圆外的延伸的射线不相交．应用 φ 在 t 处的连续性，取 $\epsilon_t=d(p, y)$．它提供一个数 $\delta_t>0$，使得对于每一个 $t'\in N(t, \delta_t)$，得到 $\varphi_{t'}\in N(p, \epsilon_t)$．因此对于每个区间 $I'\subset N(t, \delta_t)$，曲线 $\varphi|I'$ 是关于 y 的短曲线．

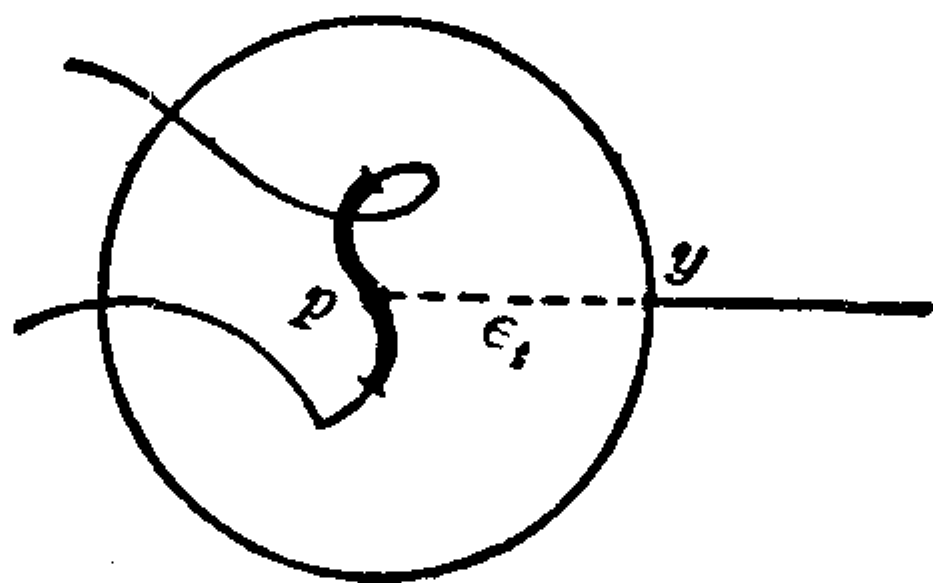


图 21.1

因 $[a, b]$ 是紧致的，并且邻域 $\{N(t, \delta_t)\}$ 覆盖着 $[a, b]$，就存在这些邻域的有限个，比如说，$N_1, N_2, \cdots, N_k$，覆盖着 $[a, b]$．令 S 为开区间 $N_1, N_2, \cdots, N_k$ 的所有端点的闭集．对于 $s, t\in S$ 而 $s\neq t$，命 δ 为所有距离 $d(s, t)$ 中的最短的一个的一半．令 $\mathscr{P}$ 为 $[a, b]$ 的任意一个划分，其区间长度至多为 δ．我们断言 $\mathscr{P}$ 在 y 处是充分地细的．为了证明这事实，只要指出 $\mathscr{P}$ 的每个子区间 I' 被包含在 $N_1, N_2, \cdots, N_k$ 的某一个中．因为 I' 的长度至多是 δ，I' 或不包含 S 的点，或包含 S 的一个点，设为 C．在第一种情形，取任一与 I' 相交的 N_i(I' 是被 $N_1, \cdots, N_k$ 所覆盖)；于是 $I'\subset N_i$，因为区间 I' 不包含开区间 N_i 的端点．在第二种情形，取任一包含 c 的 N_i；则仍有 $I'\subset N_i$，因为 I' 不包含 N_i 的端点．这就完成了 1 的证明．

2 的证明 设 $\mathscr{P}$ 是 φ 的一个充分细的划分. 设在 $\mathscr{P}$ 的一子区间 I_k 内引进一个新点把 I_k 分成两个子区间 I', I'', 因而从 $\mathscr{P}$ 获得一个划分 $\mathscr{P}'$. 则在第 20 节所证明的可加性告知我们

$$A(\varphi|I',\ y)+A(\varphi|I'',\ y)=A(\varphi|I_k,\ y).$$

两端同时加上所有 $j\neq k$ 的各项 $A(\varphi|I_j,\ y)$, 就有结果

$$A(\mathscr{P},\ y)=A(\mathscr{P}',\ y).$$

把划分 $\mathscr{P}$ 的点 $\{t_0,\ t_1,\ \cdots,\ t_m\}$ 叫做 $\mathscr{P}$ 的顶点. 如果 $\mathscr{P}$, $\mathscr{P}'$ 是 φ 的两个划分, 使得 $\mathscr{P}'$ 的顶点包含 P 的顶点, 则 $\mathscr{P}'$ 叫做 $\mathscr{P}$ 的加细, 并用 $\mathscr{P}'<\mathscr{P}$ 来表示. $\mathscr{P}'$ 的每个子区间必在 $\mathscr{P}$ 的某个子区间之内. 所以如果 $\mathscr{P}$ 充分地细, 所有 $\mathscr{P}$ 的加细也一样.

如果 $\mathscr{P}'<\mathscr{P}$, 可取 $\mathscr{P}'$ 的那些不是 $\mathscr{P}$ 的顶点的顶点, 每次只引进它们中的一个. 这样, 我们就得到一序列的加细 $\mathscr{P}=\mathscr{P}_1>\mathscr{P}_2>\cdots>\mathscr{P}_s=\mathscr{P}'$. 再假定 $\mathscr{P}$ 是充分细的. 于是这证明的头一段的结果给出

$$\begin{aligned}A(\mathscr{P},\ y)=A(\mathscr{P}_1,\ y)&=A(\mathscr{P}_2,\ y)\\&=\cdots=A(\mathscr{P}_s,\ y)=A(\mathscr{P}',\ y).\end{aligned}$$

所以 $\mathscr{P}'<\mathscr{P}$ 与 $\mathscr{P}$ 充分地细蕴涵 $A(\mathscr{P},\ y)=A(\mathscr{P}',\ y)$.

现在令 $\mathscr{P}_1$, $\mathscr{P}_2$ 为任两充分细的划分. $\mathscr{P}_1$ 与 $\mathscr{P}_2$ 的顶点的并集是另一个划分的顶点集, 我们把这另一个划分叫作 $\mathscr{P}_3$. 显然 $\mathscr{P}_3<\mathscr{P}_1$ 与 $\mathscr{P}_3<\mathscr{P}_2$. 前一段的结果提供

$$A(\mathscr{P}_1,\ y)=A(\mathscr{P}_3,\ y)$$

与
$$A(\mathscr{P}_2,\ y)=A(\mathscr{P}_3,\ y);$$

因而
$$A(\mathscr{P}_1,\ y)=A(\mathscr{P}_2,\ y),$$

证明完成.

习　题

1. 在图 17.8 各区域 A, B, D 及 F 中取一点 y, 试求 φ 在 y 处的一个充分细的划分.

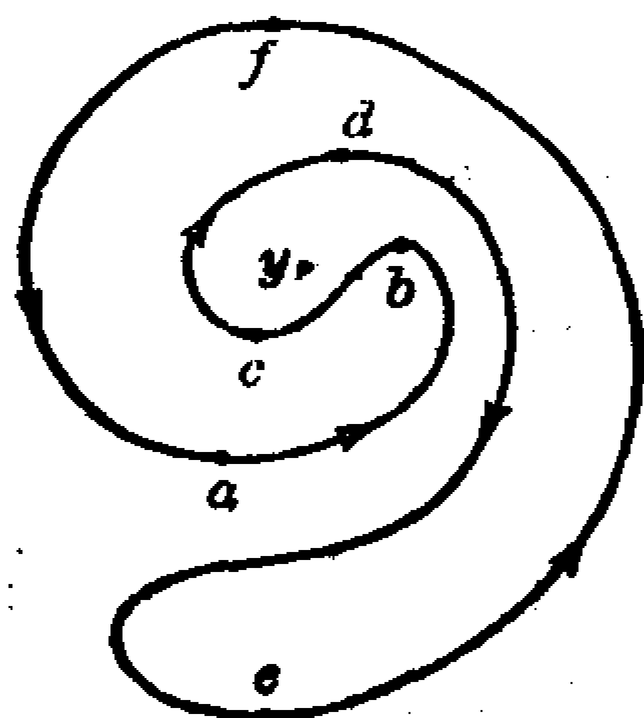


图 21.2

2. 设图 21.2 中的曲线用点 a, b, c, d, e, f 作出一个划分.

(a) 从 a 开始, 沿着箭头方向走, 哪一段曲线是在 y 处的最大的短曲线?

(b) 是否有另一段可与从 a 到 d 这段连接起来, 使得它们的并集是在 y 处的短曲线?

(c) 试求出最少个数的点 a, b, …, 使它们提供在 y 处一个充分地细的划分.

22. 围绕数 $W(\varphi, y)$

一旦找到了 φ 在 y 处的一个充分细的划分 $\mathscr{P}=\{\varphi_0, \varphi_1, \cdots, \varphi_m\}$, 只要按例行的办法, 使用量角器来得到各 $A(\varphi_i, y)$; 并注意应有的正负号而相加其结果就得出 $A(\varphi, y)$. 在求 $A(\varphi_i, y)$ 时, 我们总把不与 φ_i 相交的射线 L_i 放在刻度为零的位置上, 然后取 φ_i 的两端点的读数的差. 于是对于每一个短曲线, 需要把量角器重新定位. 现在我们将说明如何能用量角器的单独一个位置来得到所有的读数, 以及如何能把计算方法大为缩短.

跟前面一样, 令 C 为以 y 为中心而半径为 1 的圆. 对于各 $i=0, 1, \cdots, m$, 令 p_i 表示 C 与以 y 为起点并且过曲线 φ 上的点 φt_i 的射线的交点. 对各短曲线 φ_i, 令 L_i 为以 y 为起点并且不与 φ_i 相交的射线. 圆上两点 p_{i-1} 与 p_i 决

定两段弧；令 $p_{i-1}p_i$ 表示这两弧中不与 L_i 相交的那一段．按照第 20 节所说明的，$A(\varphi_i, y)$ 是这弧的角度量，附有适当的符号．弧的定向是由 p_{i-1} 到 p_i．如果这定向系反时针方向，$A(\varphi_i, y)$ 的符号为正，否则为负．

为了方便，假定量角器的半径为 1．把量角器的中心放在点 y 处，并通过旋转把量角器的零放在 C 的一点 q 处，q 与 $p_0, p_1, \cdots, p_m$ 都不同．现保持量角器固定，且令 $x_0, x_1, \cdots, x_m$ 依次表示点 $p_0, p_1, \cdots, p_m$ 的直接读数，以度计．各 x_i 都在 0 与 360 之间．现在我们能叙述 $A(\varphi, y)$ 的简化公式．

定理 22.1 令 r 为含 q 的正向弧 $p_{i-1}p_i$ 的个数，又令 s 为含 q 的负向弧 $p_{i-1}p_i$ 的个数．则

$$A(\varphi, y)=x_m-x_0+(r-s)360.$$

图 22.1 给出定理的说明．如果画出射线 yq，就看出它遇曲线 φ 三次．在各交点处，φ 的定向，因而弧 $p_{i-1}p_i$ 的定向，都能被决定．先为负，而后再为负，最后为正；故 $r=1$ 而 $s=2$．量角器的读数以 q 为零，对 x_m 为 65，对 x_0 为 195．故 $A(\varphi, y)=65-195+(1-2)360=-490$．

这定理的一个推论是：虽然 x_m, x_0, r 与 s 确实依赖于零点 q 的选择，但

$$x_m-x_0+(r-s)360$$

这数并不依赖于零点 q 的选择．

为着证明这定理，回忆

$$A(\varphi, y)=\sum_{i=1}^{m}A(\varphi_i, y).$$

各 $A(\varphi_i, y)$ 是弧 $p_{i-1}p_i$ 的角度量，我们将用读数 x_{i-1}, x_i 把它

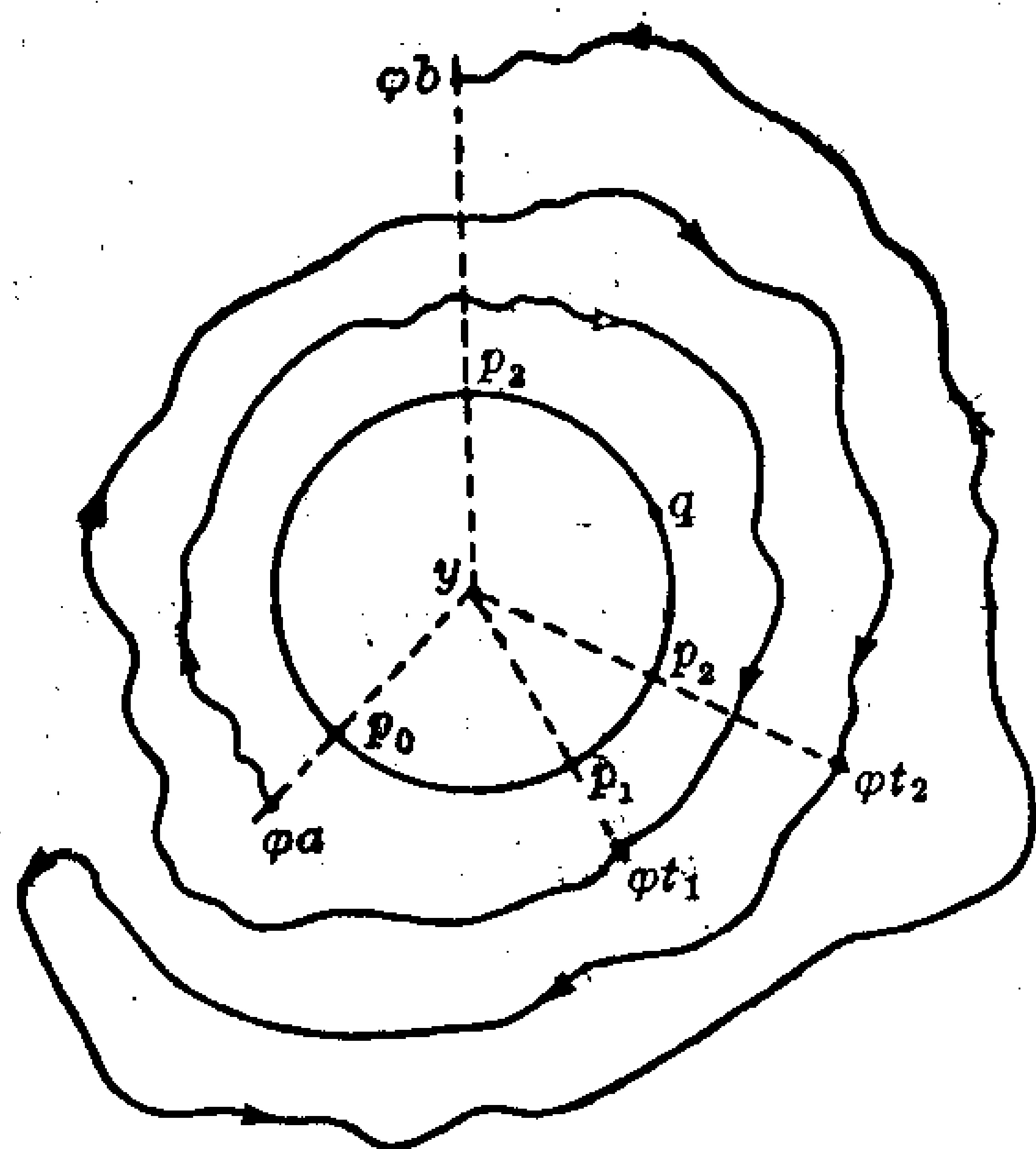


图 22.1

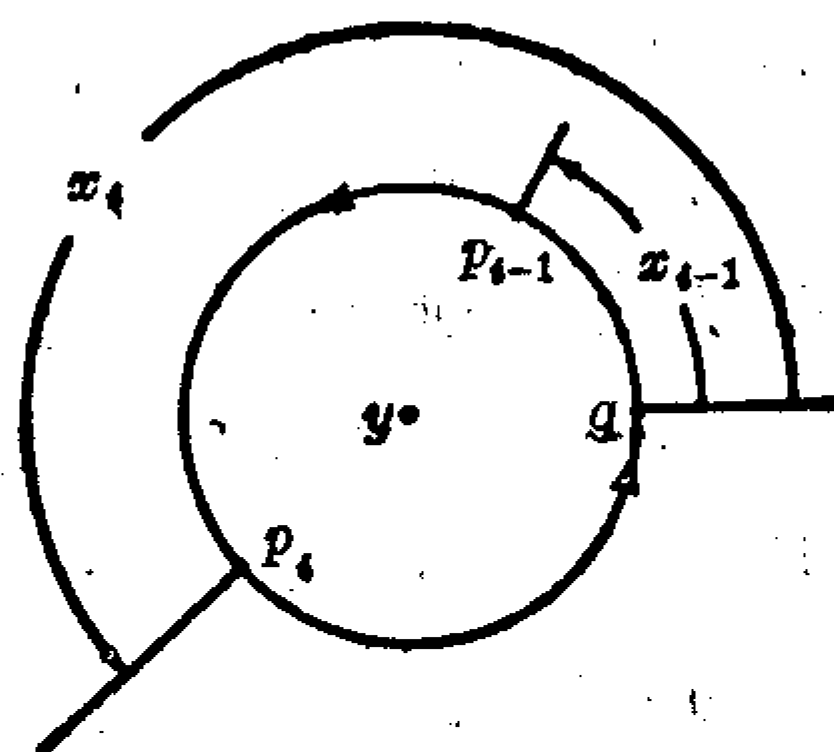


图 22.2

表示出来.

首先考虑一个 i, 使得弧 $p_{i-1}p_i$ 如图 22.2 所示, 不包含 q. 按照一短曲线所扫过的角的定义, $A(\varphi, y)=x_i-x_{i-1}$. 注意, 即使当弧的定向为负时, 这仍成立, 因那时 $x_{i-1}>x_i$, 故 x_i-x_{i-1} 为负.

其次考虑一个 i, 使弧 $p_{i-1}p_i$ 为正向并含有 q, 如图 22.3 所示. 由弧 $p_{i-1}q$ 与弧 qp_i 所决定的角相加, 得

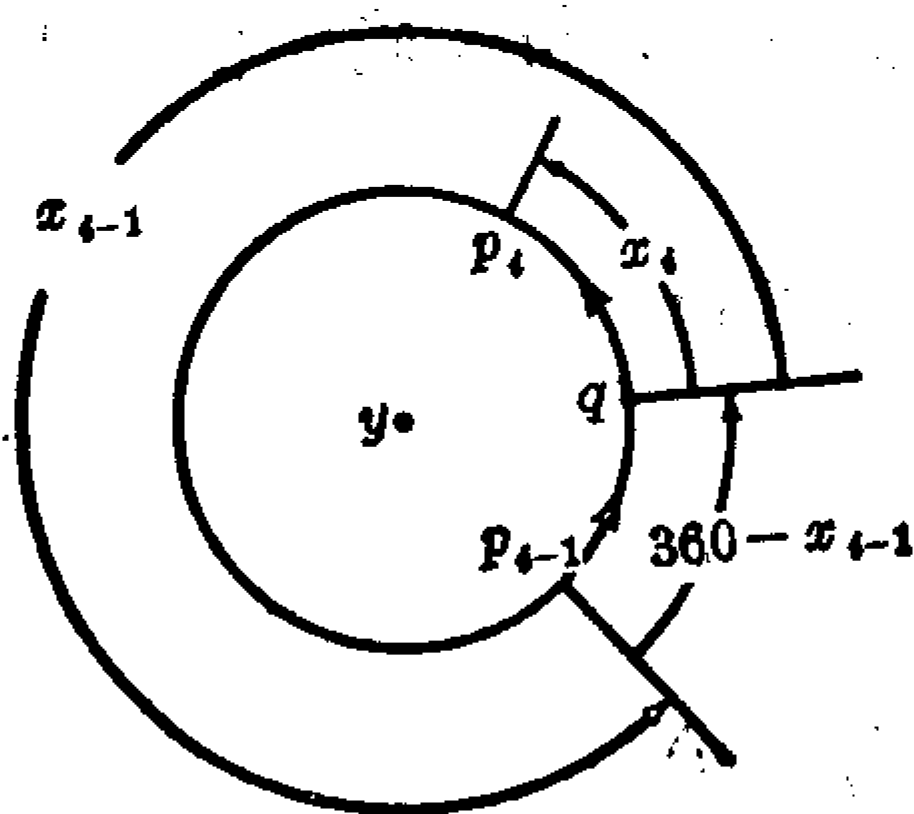


图 22.3

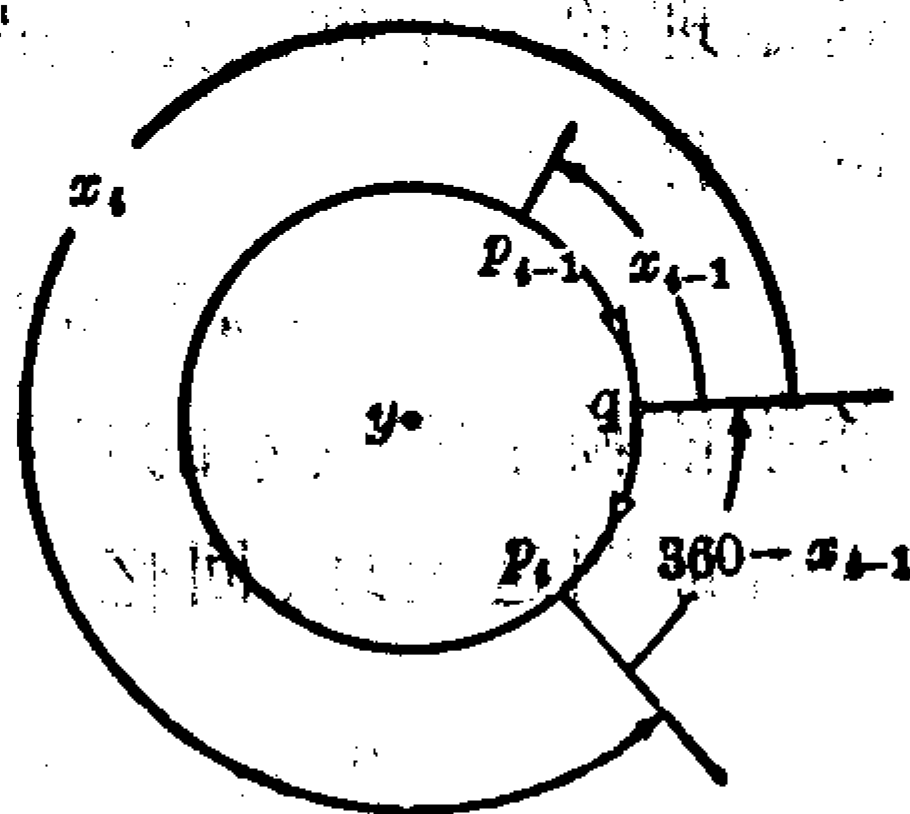


图 22.4

$$A(\varphi_i,\ y)=360-x_{i-1}+x_i=x_i-x_{i-1}+360.$$

最后考虑一个 i，使弧 $p_{i-1}p_i$ 为负向并含有 q，如图 22.4 所示．由弧 $p_{i-1}q$ 与弧 qp_i 所决定的角相加，得

$$A(\varphi_i,\ y)=-x_{i-1}-(360-x_i)=x_i-x_{i-1}-360.$$

以上三种情况，包括了所有的可能性．如果相加所有的 $A(\varphi_i,\ y)$，$i=1,\ 2,\ \cdots,\ m$，每一项将有一个 x_i-x_{i-1}，其中 r 项将各有一个 $+360$，而 s 项将各有一个 -360．所以

$$\begin{aligned}A(\varphi,\ y)&=(x_m-x_{m-1})+(x_{m-1}-x_{m-2})\\&\quad+\cdots+(x_1-x_0)+r360-s360\\&=x_m-x_0+(r-s)360,\end{aligned}$$

这就完成了证明．

系　如果 φ 是一闭曲线，则 $A(\varphi,\ y)=(r-s)360$．

只要注意，对于闭曲线，$\varphi a=\varphi b$，所以 $x_m=x_0$，就可得到系的证明．

现在我们已达到最后的阶段来给出围绕数的一个精确定义：

$$W(\varphi,\ y)=A(\varphi,\ y)/360=r-s.$$

从而围绕数是一个整数．

习　题

1. 如果一闭曲线是在点 y 处的一短曲线，它的围绕数是什么？
2. 图 22.5 中的闭曲线的一个划分已由图中所示最高点 $b,\ f,\ d,\ h$ 及最低点 $a,\ c,\ e,\ g$ 给定．量角器的零放在图中画出的射线上，各顶点在量角器上的读数列出如下：

$$\varphi t_i=a,\quad b,\quad c,\quad d,\quad e,\quad f,\quad g,\quad h$$

$$x_i=270,\ 90,\ 300,\ 20,\ 340,\ 45,\ 350,\ 60$$

(a) 求出从 a 到 d 的曲线和从 b 到 g 的曲线在 y 处所扫过的角．

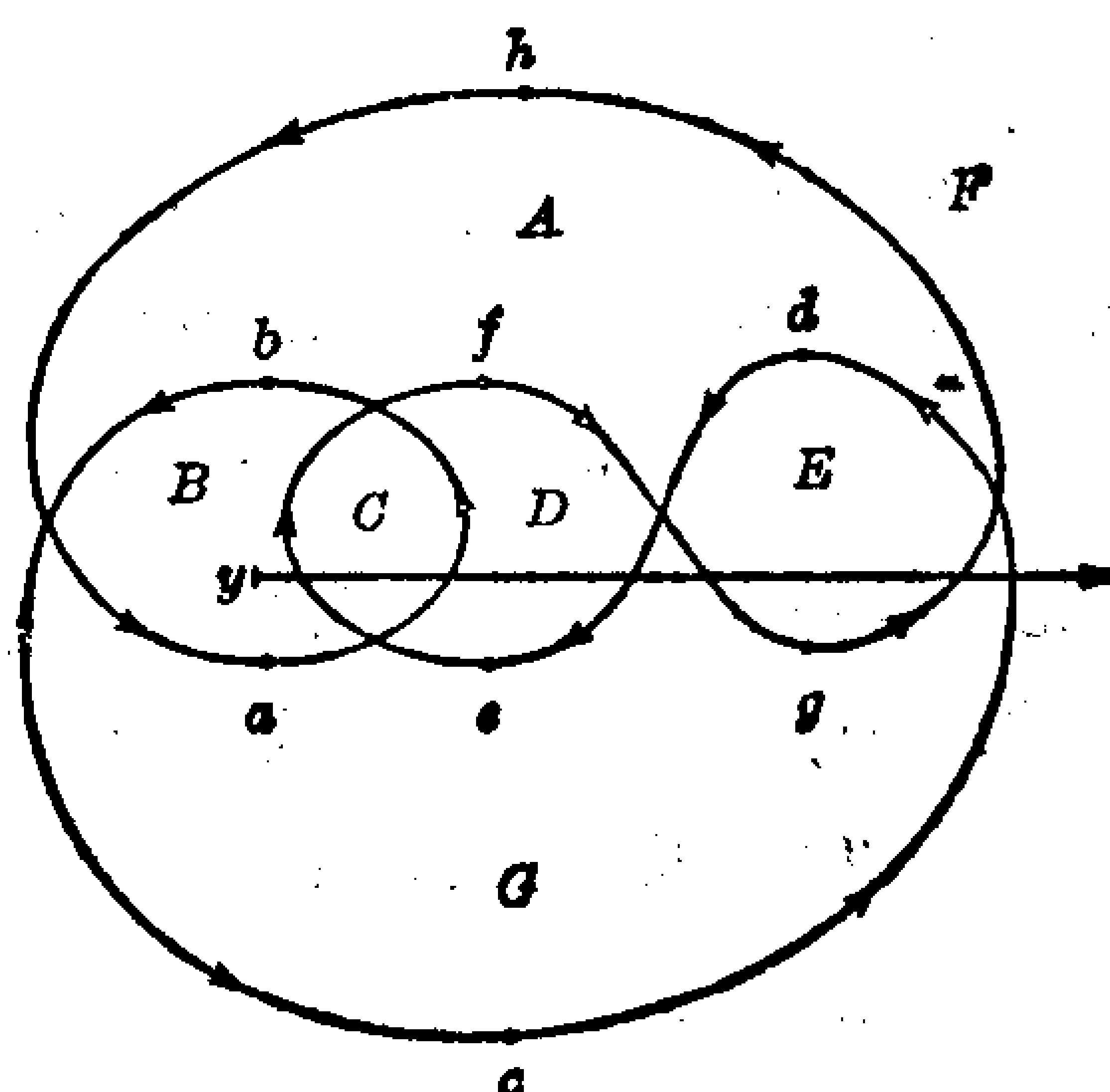


图 22.5

(b) 求围绕数 $W(\varphi, y)$，并验证第 17 节习题 2 所得结果.

(c) 建议射线 yq 的一不同方向，使 $W(\varphi, y)$ 最容易求出.

(d) 对于各区域 $A, B, \cdots$，中一点，验证第 17 节中所得围绕数的结果.

23. $A(\varphi, y)$ 与 $W(\varphi, y)$ 的性质

在精确地定义了 $A(\varphi, y)$ 与 $W(\varphi, y)$ 之后，现在应该证明它们确有我们声称的性质.

1. 如果 φ 是一个点曲线，则

$$A(\varphi, y)=0 \quad 与 \quad W(\varphi, y)=0.$$

因为 $\varphi[a, b]$ 是一个点，φ 是短曲线，平凡的划分是充分地细的. 但对于短曲线，$\varphi a=\varphi b$ 蕴含着 $x_a=x_b$，故 $A(\varphi, y)=0$; 因而 $W(\varphi, y)=A(\varphi, y)/360=0$.

2. $A(\varphi, y)$ 具有关于 φ 的可加性. 明确地说，设 $a<b<c$，并且 $\varphi: [a, c]\to P$. 令 $\varphi_1=\varphi|[a, b]$，又 $\varphi_2=\varphi|[b, c]$. 则 $A(\varphi, y)=A(\varphi_1, y)+A(\varphi_2, y)$. 如果 $\varphi a=\varphi b=\varphi c$，$\varphi_1$，

φ_2, φ 都是闭曲线，而 $W(\varphi, y)=W(\varphi_1, y)+W(\varphi_2, y)$.

令 $\mathscr{P}_1$ 及 $\mathscr{P}_2$ 分别为 φ_1, φ_2 的充分细划分. 则 $\mathscr{P}_1$, $\mathscr{P}_2$ 诸顶点的并集给出 φ 的一充分细的划分. 因为 $A(\mathscr{P}, y)$ 的各项都与 $A(\mathscr{P}_1, y)+A(\mathscr{P}_2, y)$ 的各项相同，显然

$$A(\mathscr{P}, y)=A(\mathscr{P}_1, y)+A(\mathscr{P}_2, y),$$

这就证明了第一个关系. 在 φ, φ_1, φ_2 为闭曲线时，这关系的各项是 360 的整数倍. 除以 360, 就给出围绕数的关于 φ 的可加性.

习　题

1. 利用第 22 节习题 2 中的图形以及量角器所给出的读数. 如果 $\varphi t_0=a$, $\varphi t_1=d$, 以及 $\varphi t_2=g$, 求出 $A(\varphi_1, y)$, $A(\varphi_2, y)$, 并适用本节中适当的结果求出 $A(\varphi|[t_0, t_2], y)$.

24. 曲线的同伦

在下一节中将要证明：曲线在一点处的围绕数不会改变，如果这曲线或这点依某种方式连续地变化（见第 18 节）. 本节的目的是明确地叙述我们将容许的变化种类.

定义　令 φ_0 与 φ_1 为空间 Y 中两条曲线，它们的定义域是同一个区间 $[a, b]$. 则 φ_0 到 φ_1 的同伦是一矩形 Q 到 Y 的映射，使 Q 的底边映成曲线 φ_0, 而顶边映成 φ_1. 明确地说，令 Q 为两变量 (t, τ) 平面中的矩形：$a\leqslant t\leqslant b$ 及 $0\leqslant\tau\leqslant 1$. 则 φ_0 到 φ_1 的一个同伦 Φ 是一个映射 $\Phi: Q\to Y$, 使得

$$\Phi(t, 0)=\varphi_0 t \text{ 与 } \Phi(t, 1)=\varphi_1 t, \text{ 对于所有的 } t\in[a, b].$$

在 φ_0, φ_1 都是闭曲线时，作为闭曲线 φ_0 到闭曲线 φ_1 的同伦

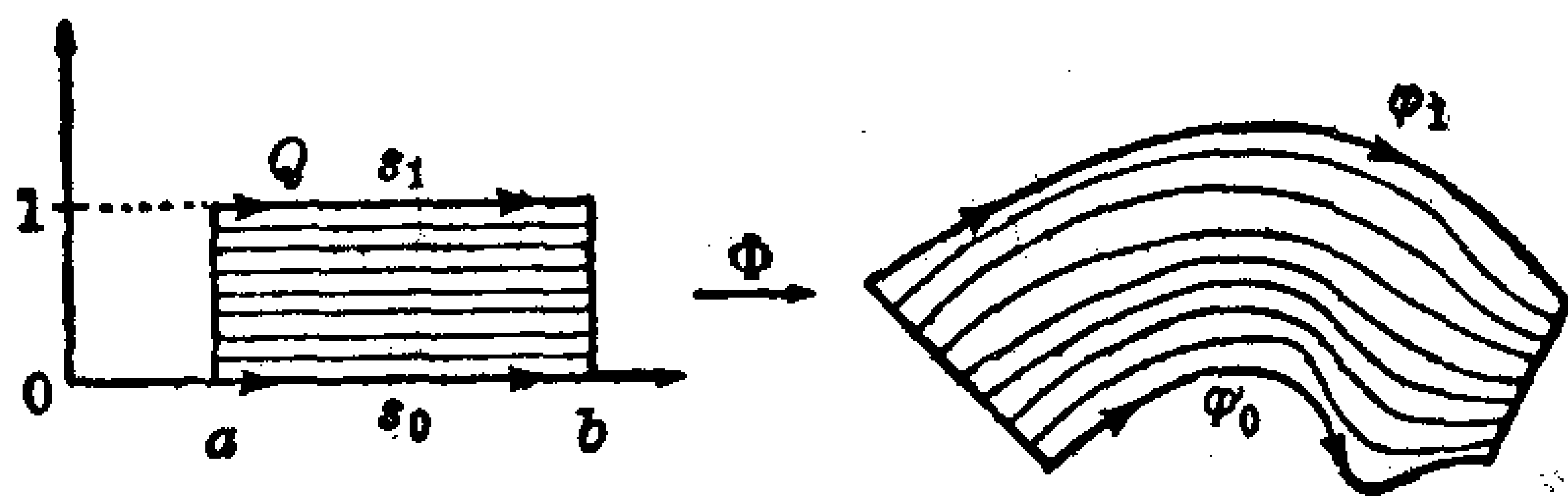


图 24.1

是上述的同伦 Φ，再满足下述条件：

$$\Phi(a, \tau)=\Phi(b, \tau) \quad 对于所有\ \tau\in[0, 1].$$

这个定义有极透彻的几何意义．画出由水平线段 s_τ 组成的矩形 Q，每一值 $\tau\in[0, 1]$ 有一条 s_τ．Φ 在线段之一 s_τ 上的限制决定一由 $\varphi_\tau t=\Phi(t, \tau)$ 所定义的曲线 $\varphi_\tau:[a, b]\to Y$．于是得到一族曲线；对应于 0 与 1 之间每一个值 τ，有一条曲线(见图 24.1)．如果把 τ 看作时间变量，那末就可把这族曲线看成是单独一条动曲线的各种位置．Q 中每个铅垂线段映成动曲线的一点所描出的道路．因为这个图形，一个同伦经常也叫作一个形变．

如果两曲线 φ_0, φ_1 映射 $[a, b]$ 到平面 P 或到 R^m，则有从 φ_0 到 φ_1 的一种特别的同伦，叫做线性同伦．对于 Q 中各对 (t, τ)，定义线性同伦 $\Phi(t, \tau)$ 为把从 $\varphi_0 t$ 到 $\varphi_1 t$ 的线段以比 $\tau:1-\tau$ 分割的分点(见图 24.2)．比 0:1 给出线段的起点，而 1:0 给出终点；故 $\Phi(t, 0)=\varphi_0 t$ 而 $\Phi(t, 1)=\varphi_1 t$．Φ 在 Q 的各竖直线段上的限制是一相似映射，因为比的保持是相似映射的特征[1]．

---

1) 所以，用一点解析几何知识，可知有在 P 或 R^m 中的式子：

$$\Phi(t, \tau)-\varphi_0 t:\varphi_1 t-\Phi(t, \tau)=\tau:1-\tau,$$

从而又推导出

$$\Phi(t, \tau)=(1-\tau)\varphi_0 t+\tau\varphi_1 t.$$

这里因为 t 已给定，从而 $\varphi_0 t$ 与 $\varphi_1 t$ 是已知的两点．所以这后一个式子是连接 $\varphi_0 t$ 与 $\varphi_1 t$ 这两点的直线段的以 τ 为参数的参数表示．——译者注

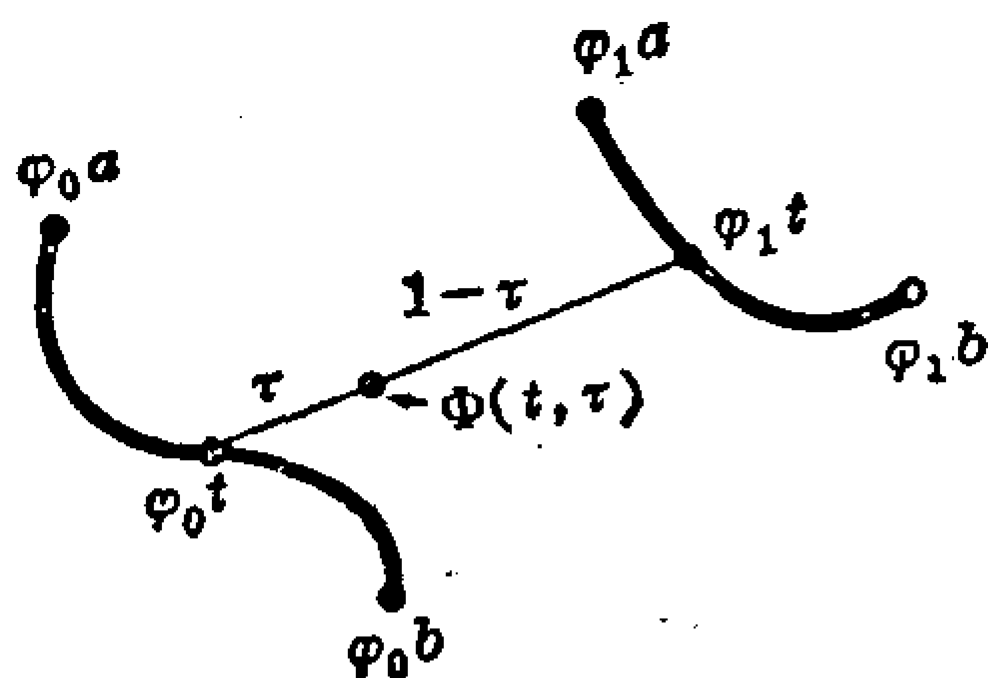


图 24.2

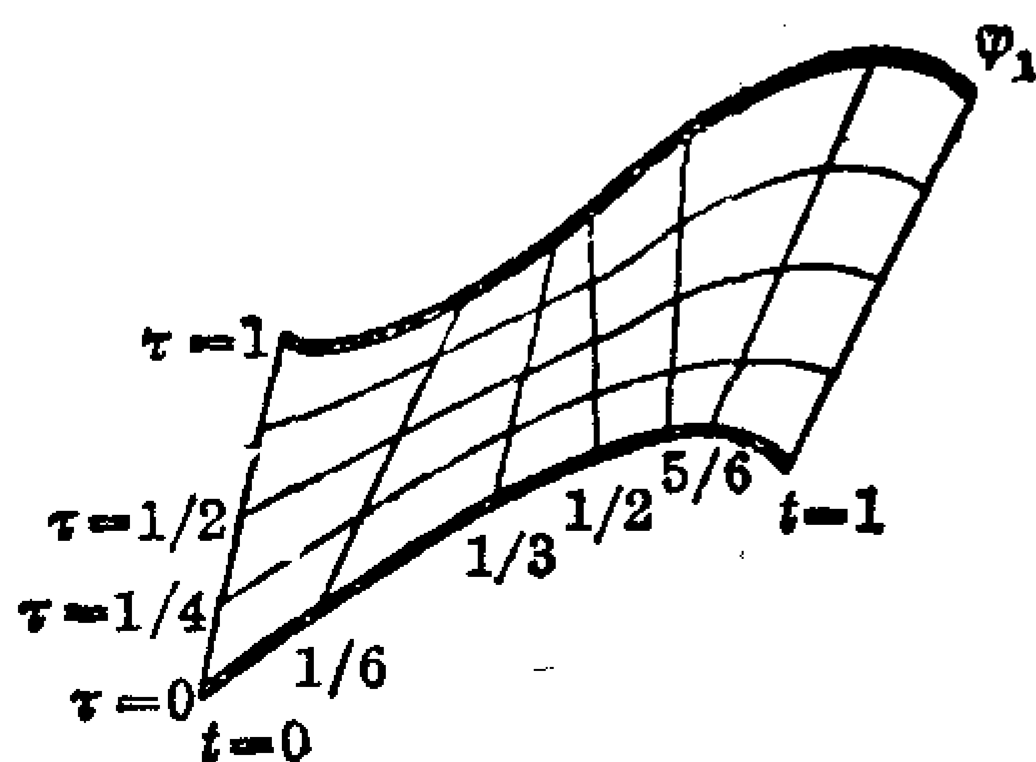


图 24.3

图 24.3 给出线性同伦的说明．图中已画出动曲线在时刻 $\tau=0$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ 与 1 时的位置；以及动曲线上对应于 $t=0$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{6}$ 与 1 的各点所描出的直线道路．注意，动曲线上单独一点总以常速度运动，走出一条直线段．

必须证明线性同伦 Φ 连续†．用 (c, γ) 表示 Q 的一点的坐标．我们要证明 Φ 在该点处连续．令 (t, τ) 表示 Q 的任一其它点的坐标．引进缩写：

$$u=\varphi_0 c,\ v=\varphi_1 c,\ z=\Phi(c, \gamma),\ z''=\Phi(c, \tau),$$

$$u'=\varphi_0 t,\ v'=\varphi_1 t,\ z'=\Phi(t, \tau).$$

图 24.4 显示 (t, τ) 接近 (c, γ) 时的情形．实线段 uu' 与 vv' 为：当 τ 从 0 变到 1 时，点 φc 与 φt 在同伦下描出的道路．我们要证明：把 (t, τ) 限制于 (c, γ) 附近，就能使距离 $d(z, z')$ 变小（小于一指定的 $\epsilon>0$）．由三角不等式，

† 对于熟悉向量代数的读者，我们能写 $\Phi(t, \tau)=(1-\tau)(\varphi_0 t)+\tau(\varphi_1 t)$，并能论证 $(1-\tau)(\varphi_0 t)$ 是连续的，因为它是连续数量函数 $1-\tau$ 与连续向量函数 $\varphi_0 t$ 的乘积．同样，$\tau(\varphi_1 t)$ 连续．最后，$\Phi(t, \tau)$ 是连续的，因为它是两个连续函数的向量和．

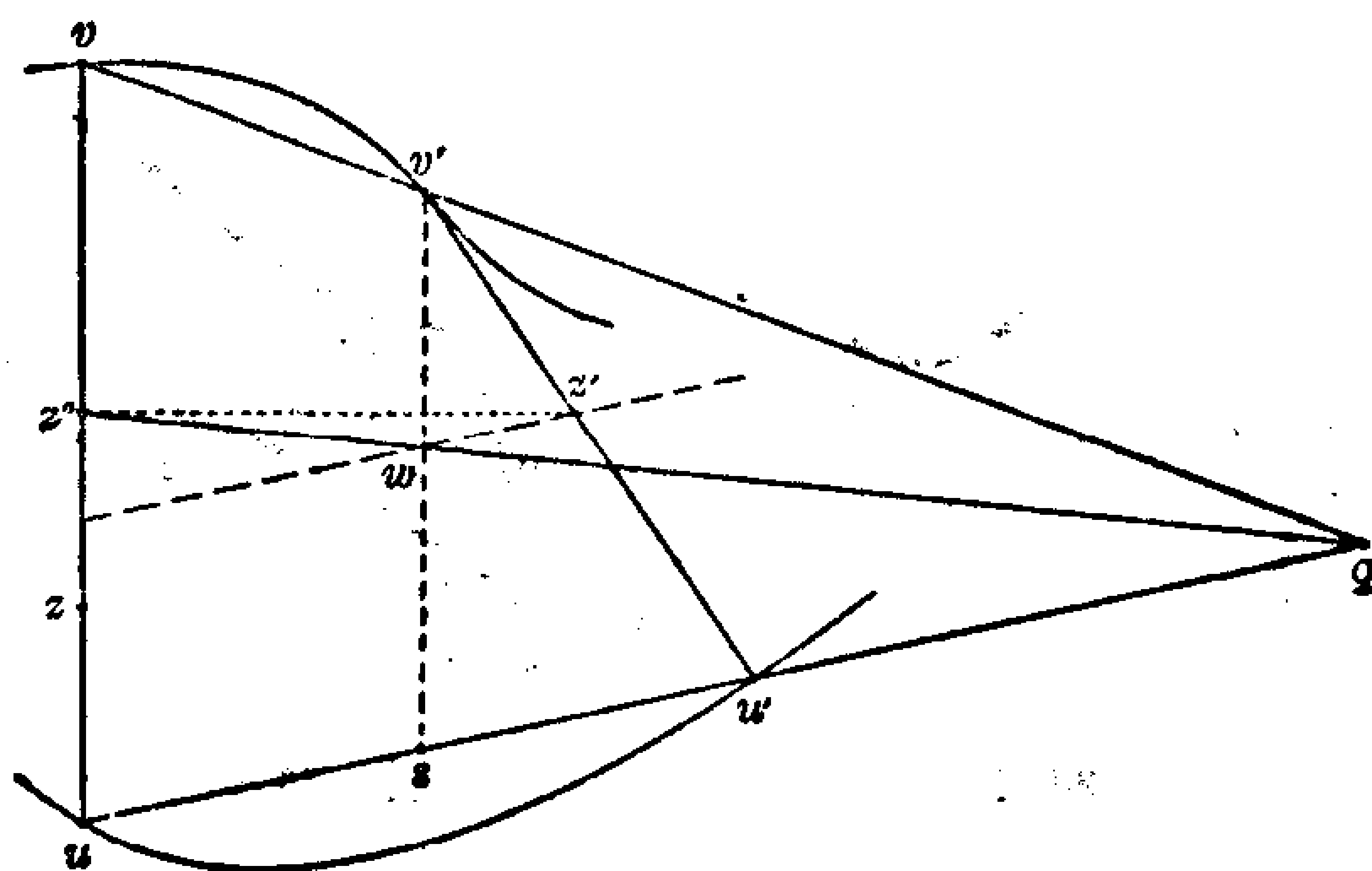


图 24.4

$$d(z, z') \leqslant d(z, z'') + d(z'', z').$$

因为从[0, 1]到线段 uv 的映射(它把 τ 映成 $\Phi(c, \tau)$)是相似映射,它是连续的. 因此,对应于正数 $\epsilon/2$,有一 $\delta'>0$,使得对于满足 $|\tau-\gamma|<\delta'$ 的每个 τ,

$$d(z, z'')<\epsilon/2.$$

因为 φ_0, φ_1 都在 c 处连续,存在着数 $\delta_0>0$ 与 $\delta_1>0$ 使得,

$$d(u, u')<\epsilon/2,\ \text{对于满足}\ |t-c|<\delta_0\ \text{的每个}\ t,$$

$$d(v, v')<\epsilon/2,\ \text{对于满足}\ |t-c|<\delta_1\ \text{的每个}\ t.$$

现令 δ 为 δ', δ_0 与 δ_1 中最小者. 如果 (t, τ) 在 $N((c, \gamma), \delta)$ 中,则所有前述三个不等式都成立. 还能证明 $d(z'', z')$ 不大于 $d(u, u')$ 与 $d(v, v')$ 二者中的较大者. 图 24.4 显示出,当 $d(u, u')$ 是较大者时,如何证明这个事实. 通过 v' 作一平行于 vu 而与 uu' 相交于 s 的直线,通过 z' 作一平行于 uu' 而交 $v's$ 于 w 的直线. 于是直线 qw 延长后交 vu 于一点 r. 由相似三角形, r 分 vu 的比,等于 z' 分 $v'u'$ 的比;因此 $r=z''$. 于是

$$\begin{aligned} d(z'', z') &\leqslant d(z'', w) + d(w, z') \\ &\leqslant d(u, s) + d(s, u') = d(u, u'). \end{aligned}$$

所以 $d(z'', z') < \epsilon/2$. 把这与 $d(z, z'') < \epsilon/2$ 以及三角不等式组合起来，得 $d(z, z') < \epsilon$. 这就完成了 Φ 连续的证明.

在两曲线 φ_0, φ_1 都是闭曲线时，φ_0 到 φ_1 的线性同伦仍然是：φ_0 与 φ_1 为闭曲线时的同伦；因为 $\varphi_0 a = \varphi_0 b$ 与 $\varphi_1 a = \varphi_1 b$ 蕴涵从 $\varphi_0 a$ 到 $\varphi_1 a$ 以及从 $\varphi_0 b$ 到 $\varphi_1 b$ 的线段重合，从而对于所有的 $\tau \in [0, 1]$, $\Phi(a, \tau) = \Phi(b, \tau)$.

当同伦的终端曲线 φ_1 是一条常数曲线即单独的一点时，我们就说该同伦把初始曲线 φ_0 收缩成一点. 这种同伦的一个重要例子如下. 设 D 为以 z 为中心、以圆 C 为边界的圆片. 设 φ_0: $[0, 1] \to C$ 是 C 作为闭曲线的标准表示；即 $[0, 1]$ 恰好按逆时针方向包围 C 一次（见 16 节）. 设 φ_1: $[0, 1] \to z$ 为在中心的常函数所给出的曲线. 最后设 Φ 是从 φ_0 到 φ_1 的线性同伦. 则 Φ 收缩 φ_0（或 C）成一点. 如把同伦画成一动曲线，则在各瞬时它都是以 z 为中心的圆，并且各点沿径向运动趋于 z.

现在设 $f: D \to P$ 是从圆片到平面的一映射，又设 Φ 是方才所描述的同伦. 则复合 $f\Phi: Q \to P$ 是一收缩，它把闭曲线 $f\varphi_0: [a, b] \to P$ 收缩成常的闭曲线 $f\varphi_1$，即点 fz. 这个同伦给出主要定理直观证明中所用的闭曲线族（见第 18 节）.

习　题

1. 证明平面中任何闭曲线同伦于一常的闭曲线.
2. 证明任何空间 Y 中一曲线 $\varphi: [a, b] \to Y$ 同伦于保持 $[a, b]$ 的一端点固定的常映射.
3. 令 $a < b < c \in R$, 并且 $\varphi: [a, c] \to Y$ 使得 $\varphi a = \varphi b = \varphi c$, 因为闭曲线 $\varphi|[a, b]$, $\varphi|[b, c]$ 分别同伦于保持 $[a, b]$ 与 $[b, c]$ 的端点 b 固定的常映射；试证 φ 也同伦于保持 $[a, c]$ 中的点 b 固定的常映射.

4. 证明可以把从 φ_0 到 φ_1 的一个同伦倒转过来，给出从 φ_1 到 φ_0 的一个同伦.

25. 围绕数的常值性

定理 25.1 设 $\Phi: Q \to P$ 为从闭曲线 φ_0 到闭曲线 φ_1 的同伦，又设 y 为不在象 ΦQ 中的一点. 则当 τ 从 0 变到 1 时，围绕数 $W(\varphi_\tau, y)$ 是常数. 特别地，有 $W(\varphi_0, y) = W(\varphi_1, y)$.

把 $W(\varphi_\tau, y)$ 缩写为 $f\tau$; f 是定义在 $[0, 1]$ 上的函数，根据第 22 节中的证明，f 的每一个值是一个整数. 证明的主要部分是指出，在 τ 的"微小变化"下，f 是常数. 明确地，如果 $\alpha \in [0, 1]$，则存在 α 的一邻域 N_α，使得对于每个 $\tau \in N_\alpha$，有 $f\tau = f\alpha$. 一旦证完这事实，就可证明定理如下：因为在 N_α 中 f 是常数，它在 N_α 中连续，从而在 α 处连续；又因为这对于每一个 α 值都正确，故 f 在 $[0, 1]$ 中连续. 现在用反证法. 设 f 不是常数并且至少有两个不同的值，则第一编中的主要定理断言：f 取这两个值之间的所有值，包含其间的非整数值. 这与 f 的每一个值是整数的事实相矛盾，故 f 必为常数.

为了证明邻近于 $\alpha \in [0, 1]$ 时的常值性，对于 φ_α，选取一充分细的划分 $\mathscr{P}$. 首先要找出 α 的一邻域 N' 使得，对于所有的 $\tau \in N'$，$\mathscr{P}$ 对于 φ_τ 是充分地细的. 然后，利用第 22 节中所述的计算围绕数的方法，要找一个更小的邻域 N，使得在 N 中计算的每一个个别步骤保持常值性.

令 $t_0, t_1, \cdots, t_m$ 为 $\mathscr{P}$ 的顶点. 对每个子区间

$$I_k = [t_{k-1}, t_k],$$

$\mathscr{P}$ 的细，指的是：有一从 y 开始而不交 $\varphi_\alpha I_k$ 的射线 L_k. 令

D_k 表示 Q 中从 (t_{k-1}, α) 到 (t_k, α) 的线段. 我们将证明有一包含 D_k 的矩形 E_k, 使得它的象 ΦE_k 不与射线 L_k 相交. 令

$$V_k = \Phi^{-1}(P - L_k).$$

因为 Φ 连续, 并且 $P - L_k$ 是开集, 从而 V_k 是开集. 因为 $\Phi D_k = \varphi_\alpha I_k$ 是在 $P - L_k$ 中, 从而 $D_k \subset V_k$. 对于每一点 $p \in D_k$, 可选一圆形邻域 $N(p) \subset V_k$. 尔后, 在 $N(p)$ 中取其边平行于 (t, τ) 轴的最大方形, 令 $M(p)$ 表示这方形的内部. 对于所有的 $p \in D_k$, 这些 $M(p)$ 的集合是 D_k 的一开覆盖. 因为 D_k 是紧致的, 这覆盖包含一有限覆盖, 设为 $M_1, M_2, \cdots, M_n$. 令 δ_k 表示这些方形中最小一个的宽度的一半, 又令 E_k 表示 (t, τ) 值的矩形, 使得 $t \in I_k$ 与

$$|\tau - \alpha| < \delta_k.$$

由于 δ_k 的这样选择, 有

$$E_k \subset M_1 \cup M_2 \cup \cdots \cup M_n \subset V_k.$$

这是说: 对每个 $\tau \in N(\alpha, \delta_k)$, $\varphi_\tau I_k \subset P - L_k$. 假定对于每一区间 I_k, $k = 1, 2, \cdots, m$, 已作出 $N(\alpha, \delta_k)$; 令 δ 为这些数 $\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_m$ 中最小的一个, 又令 $N' = N(\alpha, \delta)$. 那末, 如果 $\tau \in N'$, 对于所有的 $k = 1, 2, \cdots, m$, 就有 $\varphi_\tau I_k \subset P - L_k$. 这就证明, 对于每个 $\tau \in N'$, $\mathscr{P}$ 对于 φ_τ 是充分地细的.

我们现在把第 22 节中计算围绕数的方法应用于这划分 $\mathscr{P}$ 以及各种曲线 φ_τ, $\tau \in N'$. 如同第 22 节, 令 C 表示以 y 为中心而半径为 1 的圆. 令 $g: P - y \to C$ 表示从 y 到 C 的径向射影. 则 $g\Phi: Q \to C$ 与 $g\varphi_\tau: [a, b] \to C$ 都连续, 因为它们都是连续函数的复合. 在 $g\varphi_\tau$ 作用下, $\mathscr{P}$ 的顶点 t_k 在 C 上的象, 即 $g\varphi_\tau t_k$, 缩写为 $p_k\tau$. 令 $A_k\tau$ 表示 C 上从 $p_{k-1}\tau$ 到 $p_k\tau$ 的弧, 它不与 L_k 相交. 如果 q 是 C 上不同于 $p_0\tau, p_1\tau, \cdots, p_m\tau$ 的一点, 则如同第 22 节, 它的围绕数 $W(\varphi_\tau, y)$ 是

$f\tau=r-s$, 其中 r(相应地 s)是包含 q 的正(负)指向的弧的个数.

挑选一点 $q\in C$, 不同于 $p_0\alpha, p_1\alpha, \cdots, p_m\alpha$. 对于各 $k=1, 2, \cdots, m$, 选取 C 上 $p_k\alpha$ 的一邻域 U_k, 它不包含 q 并且与 L_k 或 L_{k+1} 都不相交. 则 U_k 将是 C 的包含 $p_k\alpha$ 的一个短弧. 因为 $g\Phi$ 连续而 U_k 是 $p_k\alpha$ 的一邻域, 并且 $g\Phi(t_k, \alpha)=p_k\alpha$, 从而有 α 在[0, 1]中的一邻域 N_k, 使得对于所有的 $\tau\in N_k$, $g\Phi(t_k, \tau)=p_k\tau$ 在 U_k 中. 令 N 表示诸邻域 N' 以及 $N_1, N_2, \cdots, N_m$ 中最小的一个. 则对于每一个 $k=1, 2, \cdots, m$, $\tau\in N$ 蕴含 $p_k\tau\in U_k$. (注意: $p_m\tau=p_0\tau$, 因为每一个 φ_τ 是闭曲线.) 特别是, q 与 $p_0\tau, p_1\tau, \cdots, p_{m-1}\tau$ 都不同, 因为 q 不在这些 U_k 的任一个之中.

剩下来还要证明: 对于各 $\tau\in N$ 以及各 $k=1, 2, \cdots, m$, 两个弧 $A_k\tau$ 与 $A_k\alpha$ 对于 q 具有相同关系; 于是对于 φ_τ 同 φ_α, 得同一个计数 $r-s$. 首先考虑 k, 它使 U_{k-1} 与 U_k 有一共同点的情况. 则 $U_{k-1}\cup U_k$ 为一连通弧, 并且它在 C 中的余弧 D 为一含 q 的、与 L_k 相交的连通弧, 但对于所有的 $\tau\in N$, 既不包含 $p_{k-1}\tau$ 又不包含 $p_k\tau$. 因为 D 是连通的, 它就全部处于 C 上从 $p_{k-1}\tau$ 到 $p_k\tau$ 的两弧中的一个之中; 其中的一个是 $A_k\tau$, 而另一个与 L_k 相交. 因为 D 与 L_k 相交, 从而 D 不与 $A_k\tau$ 相交. 因为 q 在 D 中, 这就证明了, 对所有的 $\tau\in N$, $A_k\tau$ 不包含 q. 于是, 在这种情况, $A_k\tau$ 对 q 的关系, 对于 $\tau\in N$, 是常数; 也就是, 若 $A_k\alpha$ 不含有 q, 则对于 $\tau\in N(\alpha)$, $A_k\tau$ 就不含有 q.

最后, 考虑一个 k, 它使 U_{k-1} 与 U_k 无公共点. 则在 C 中, $U_{k-1}\cup U_k$ 的余集包含两个弧 D 与 E, 而令 D 表示与 L_k 相交的那个弧. 如上面所论证的, 可见对于所有的 $\tau\in N$,

D 不与 $A_k\tau$ 相交. 此外, 因为 E 不与 L_k 相交, 对于 $\tau\in N$, 所有弧 $A_k\tau$ 包含 E, 并且同样地从 U_{k-1} 指向 U_k. 现在 q 不在 $U_{k-1}\cup U_k$ 中, 所以它一定在 $D\cup E$ 中. 如果 $q\in D$, 就没有弧 $A_k\tau$, $\tau\in N$, 包含 q. 如 $q\in E$, 所有弧 $A_k\tau$, $\tau\in N$, 包含 q 并且是同样的转向. 于是当 τ 在 N 中变化时, $A_k\tau$ 对 q 的关系是常数. 这就对于所有的 $\tau\in N$, 证明了围绕数 $f\tau$ 的常值性. 再用紧接在定理 25.1 后的论点, 就证明了在曲线的同伦下围绕数的常值性.

定理 25.2 设 $\varphi:[a, b]\to P$ 为平面中一曲线. 设 y_0, y_1 为 P 的不在曲线 φ 上的两点, 并且存在一曲线 $\psi:[0, 1]\to P$, 它连接 y_0 与 y_1, 但不与 φ 相交, 则有围绕数的等式:

$$W(\varphi, y_0)=W(\varphi, y_1).$$

对于各个 $t\in[a, b]$ 与 $\tau\in[0, 1]$, 作向量以 φt 为起点, 并且与从 $\psi\tau$ 到 y_0 的向量平行, 长度相等. 令 $\Phi(t, \tau)$ 为这新作的向量的终点(见图 25.1). 于是, 如果对于一固定的 τ, 令

$$\varphi_\tau t=\Phi(t, \tau),$$

则曲线 φ_τ 可由曲线 φ 的平移而得到. 想像平面 P 为一刚硬的金属片, 带有沿着曲线 ψ 切割出来的一条槽沟. 用一直径小于槽沟宽度的钉子, 在金属片

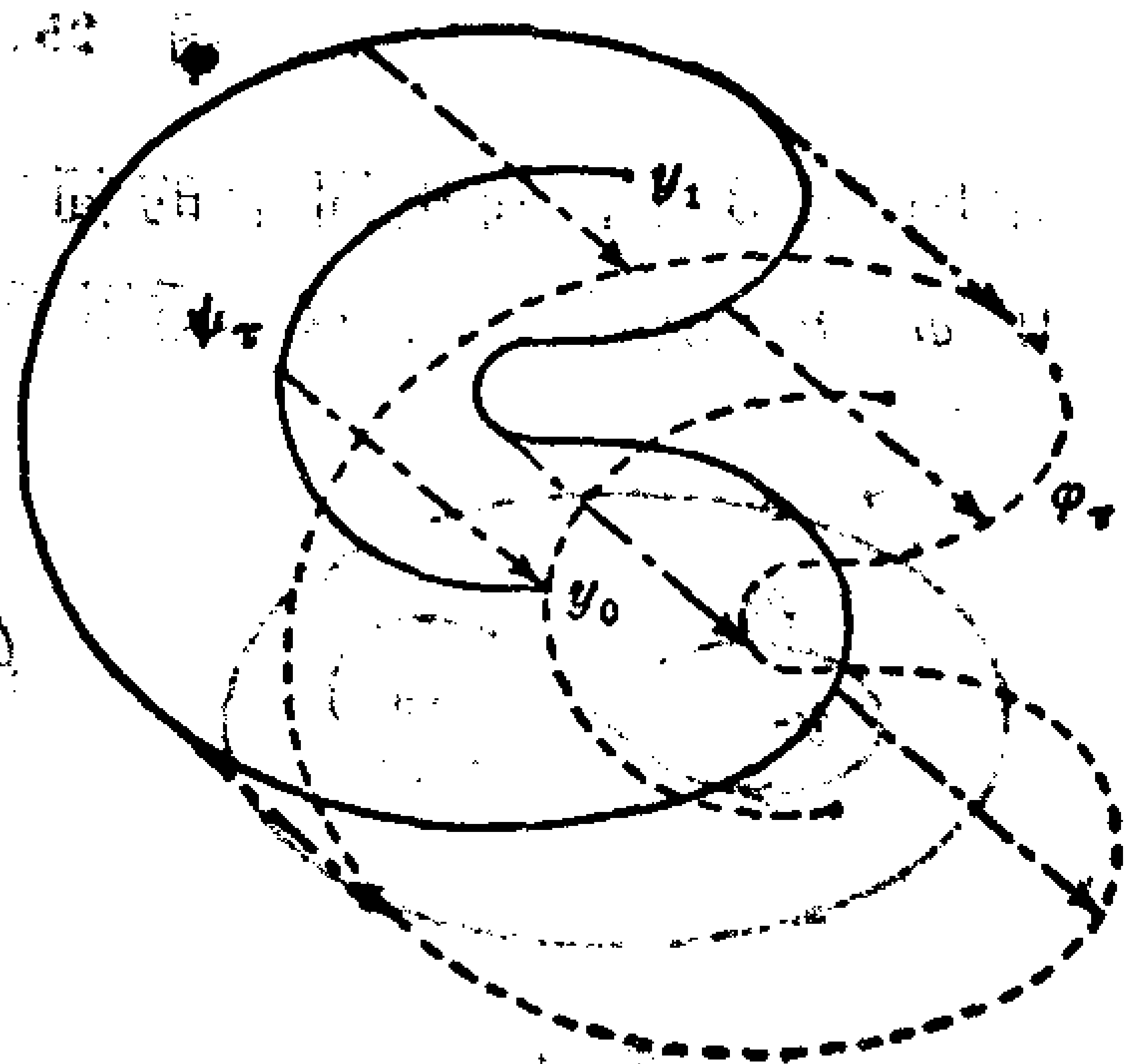


图 25.1

y_0 处, 把该片钉在墙上. 现在把金属片贴着墙滑动使得钉子

沿着槽沟走，但不容许金属片转动．闭曲线的运动结果，给出了所建立的同伦 Φ 的图形。

根据在同伦下围绕数的常值性，有

$$W(\varphi_0,\ y_0)=W(\varphi_1,\ y_0).$$

此外，在从 y_0 到 y_1 这向量所给出的平面平移下，$(\varphi_1,\ y_0)$ 这一对完全叠合(congruent)于 $(\varphi_0,\ y_1)$ 这一对．因为围绕数显然不会因叠合而改变，故 $W(\varphi_1,\ y_0)=W(\varphi_0,\ y_1)$。合并这些等式就给出这定理的结论。

习　题

1. 在图 25.2 中，指出圆 φ_0 在点 y 处的围绕数就是等圆 φ_1 在 y 处的围绕数．可应用定理 25.1 画出同伦的简图来说明．

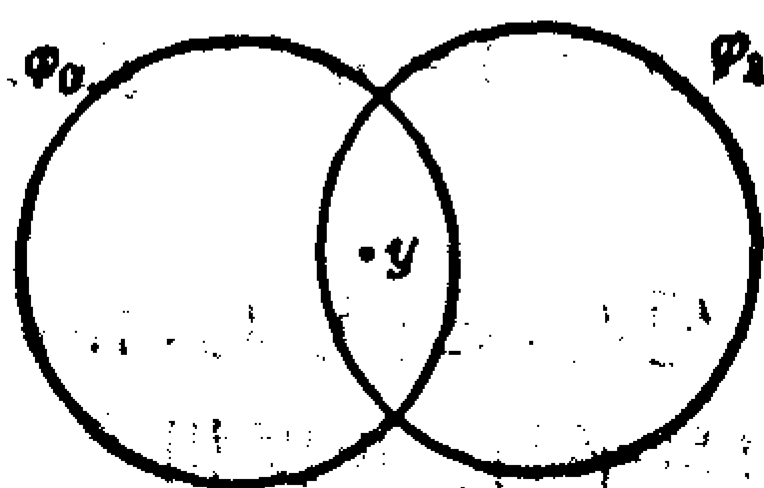


图　25.2

2. 在图 25.3 中，画出同伦的简图来说明为什么 $W(\varphi_0,\ y)=W(\varphi_1.\ y)$；说明为什么这不适用于 $W(\varphi_0,\ x)$ 与 $W(\varphi_1,\ x)$.

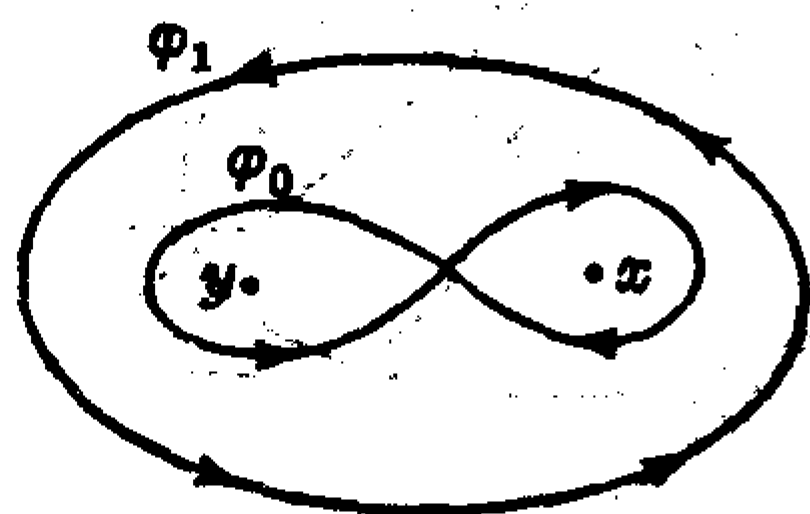


图　25.3

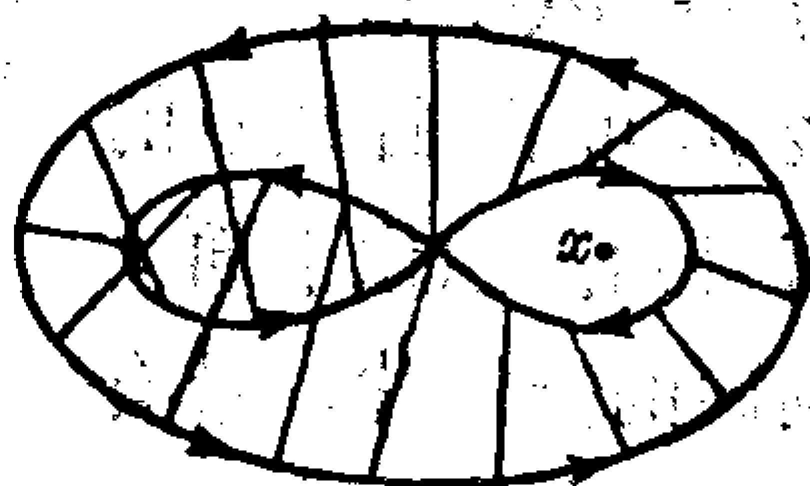


图　25.4

3. 说明为什么图 25.4 中的同伦，不适用于作为不与 x 相遇的第 2 题的同伦．

26. 主要定理的证明

在第18节中所叙述的主要定理，现在我们手边有了证明该定理所需要的一切工具. 设 y 不在象 fD 中. 令 $\varphi_0:[0, 1]\to C$ 作为一闭曲线 C 的标准表示法. 令 Φ 为第24节所述的同伦，它将 φ_0 在 D 上面收缩到 D 的中心点 z. 则 $f\Phi$ 是 $f\varphi_0$ 成为在 fz 处常曲线的同伦. 因 $f\Phi Q\subset fD$, y 不在同伦的象中. 所以由定理25.1, $W(f\varphi_0, y)=W(f\varphi_1, y)$. 因 $f\varphi_1$ 是常曲线，$W(f\varphi_1, y)=0$ (见第23节)，因此 $W(f\varphi_0, y)=0$. 于是证明了：如 y 不在 fD 中，则 $W(f\varphi_0, y)=0$. 所以 $W(f\varphi_0, y)\neq 0$ 蕴含着 y 在 fD 中. 这就完成了证明. (图26.1说明对于第15节所述的映射 f, 同伦 $f\Phi$ 的相继阶段.)

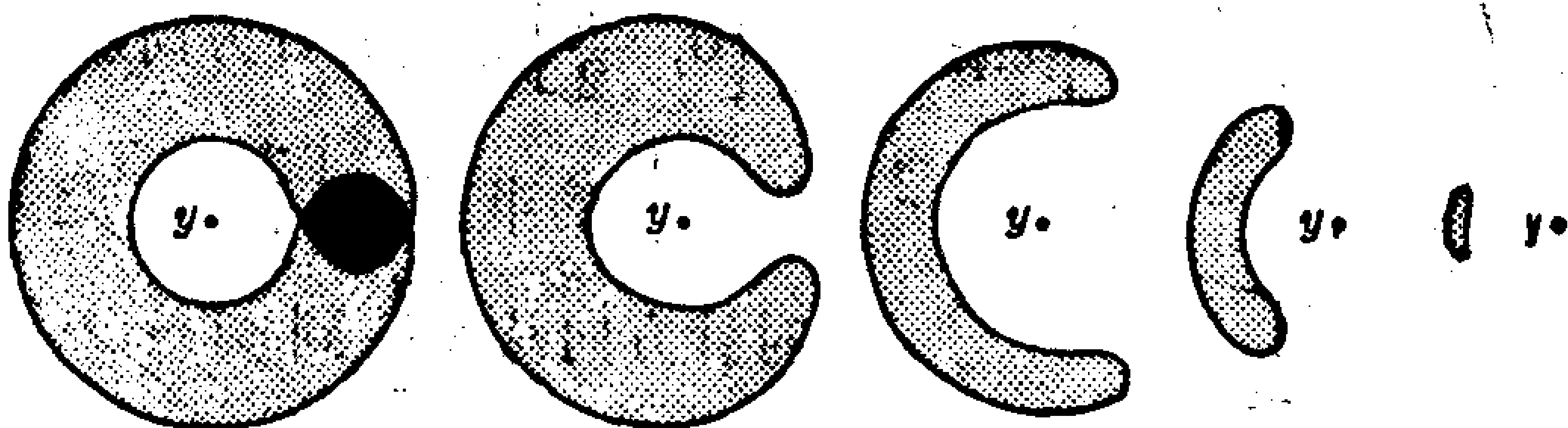


图 26.1

习 题

1. 如果定理的叙述中，圆片 D 用矩形片 D'(矩形及其内部)来替代，证明应该怎样修改? 用什么来代替 φ_0 的标准表示法以及同伦 Φ?

27. 圆在各内点处的围绕数是一

在本节中我们将证明：如果一个从圆片 D 到一平面的映

射保持圆片边界的每一个点都不动，则 D 的所有点都在 D 的象中． 为了铺平证明这一定理的道路，我们首先来证明在第 17 节中根据直观认为明显的下述命题：圆在各内点处的围绕数是一．

引理 若 C 是平面中的一个圆，y 是 C 内部的任一点，并且 $\varphi_0:[0,1]\to C$ 是把 C 看成为一闭曲线的标准表示法（看第 16 节），则

$$W(\varphi_0, y)=1.$$

为了证明这引理，采用划分 $\mathscr{P}=\left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$. 回忆 φ 是这样定义的：选取一参考点 $\varphi 0$，于是 φ 把各个 $t\in[0,1]$ 映成 C 的点 φt，从 $\varphi 0$ 到 φt 的弧所对的圆心角是 $360\,t$ 度． 所以 $\varphi\left[0, \frac{1}{2}\right]$ 是逆时针方向从 $\varphi 0$ 到 $\varphi\frac{1}{2}$ 的半圆，$\varphi\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ 是逆时针方向从 $\varphi\frac{1}{2}$ 到 $\varphi 1=\varphi 0$ 的半圆（看图 27.1）． 取 y 为中心，从第 22 节的规定得 $W(\varphi, y)=r-s$，其中 $r=1$，$s=0$. 于是在 y 是中心时，引理成立． 但各内点都能用不与 C 相遇的线段与中心连接起来． 因而，由定理 25.2，它与中心有相同的围绕数．

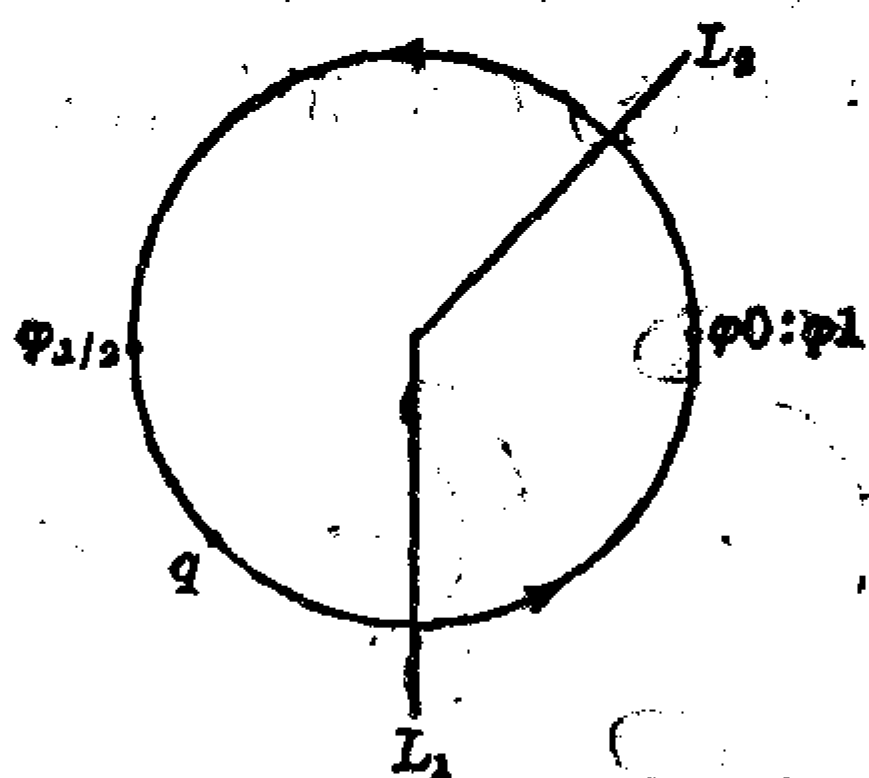


图 27.1

考虑把一薄而可伸缩的橡皮圆片的圆边粘在一桌面上的效果，作为下一命题的直觉的提法． 保持橡皮圆片的边不动，同时伸长、拉扯或扭弯这橡皮圆片；如果想要看见圆片下面是什么，我们会什么也看不见．

定理 27.1 设 $f:D\to P$ 是从一圆片 D 到平面 P 的一个映射，它保持边界圆 C 的各点不动．则象 fD 包含 D 的全部。

令 $\varphi_0:[0,\ 1]\to C$ 为 C 的作为一闭曲线的标准表示，又令 y 为 D 的一内点．因 f 保持 C 的各点不动，$f|C$ 是恒同映射，就是 $f\varphi_0=\varphi_0$．所以 $W(f\varphi_0,\ y)=W(\varphi_0,\ y)$．前面的引理断言 $W(\varphi_0,\ y)\neq 0$; 因而 $W(f\varphi_0,\ y)\neq 0$．主要定理现在适用并断言 $y\in fD$．C 的各点在 D 中，因 $fC=C$．于是 D 的全部在 fD 中．

作为本定理的一个推论，有

推论 27.2 不存在从圆片 D 到它的边界 C 的，而保持 C 的各点不动的连续映射．

人们当然能把一矩形及其内部映射成它的边界中的一条边，使得这条边保持固定．设想把挂在墙上的一幅国画取下卷起来；在这映射 f 的作用下，对于画轴上的全部点 x, $fx=x$. 由画轴所表示的边，称为矩形区域(国画)的一个收缩核．推论说的是我们不能把一个圆的内部卷起来成为它的边界；就是说，一个圆不是圆片的一个收缩核．想像圆及其内部好比是鼓的边缘与鼓膜．断言是：整张鼓膜无法拉开而卷成边缘．人们根据这形象化的例子，有时把这个推论称作鼓面原则．

习　题

1．证明矩形区域 F 的周界 E，不是 F 的收缩核；叙述这定理，推论以及它们的相应的证明．提示：利用一同胚 $h:P\to P$，映射一圆片 D 到区域 F 上(如同第 14 节作图中那样作映射，把 D 的中心 z 映

成 F 的中心 hz，并且把从 z 出发的各射线由相似变换映成从 hz 出发的平行射线).

2. 令 y 为一圆片 D 的边界 C 上的一点；证明：存在从 $D-y$ 到 $C-y$ 的连续映射，它保持 $C-y$ 的各点不动.
3. 如果 y_0 为 D 内部的一点，证明：$D-y_0$ 能连续地收缩到 C.
4. 证明下列的每一个能成为圆片 D 的收缩核：
   (a) D 的任一直径；(b) D 的任一点.
5. 叙述并证明推论 27.2 在一维时的类似命题.

28. 不动点性质

在第一编第 9 节中，我们证明了一条线段的任一自映射至少有一个不动点. 现在我们要对于一个圆片证明类似定理.

定理 28.1 令 $f:D\to D$ 为一个圆片 D 的自映射；则 f 至少保持 D 的一个点不动，即存在至少一个点 $x\in D$ 使得

$$fx=x.$$

假设不然，即假设存在一个无不动点的映射 $f:D\to D$. 则对于各个 $x\in D$，fx 与 x 都不同. 因而可以作一条射线 L_x，从 fx 出发而且通过 x. 令 gx 为 L_x 与 C 的交点. 如果 fx 在 C 上，gx 是 L_x 与 C 相交的另一点；又如果 $x\in C$，则 $gx=x$. 图 28.1 表明可能性中的几种. 于是有 $g:D\to C$，与 $g|C$ 是恒同变换. 我们要证明 g 连续；然后 g 与推论 27.2 相矛盾，而这矛盾将证明我们的定理.

要证明 g 的连续性，令 $x_0\in D$，又令 V 为 gx_0 的一邻域. 我们来作 x_0 的一邻域 U 使得 $x\in U$ 蕴含 $gx\in V$. 令 b, c 表示 V 的端点，又令 m 为线段 x_0 到 fx_0 的中点. 令 H 为通

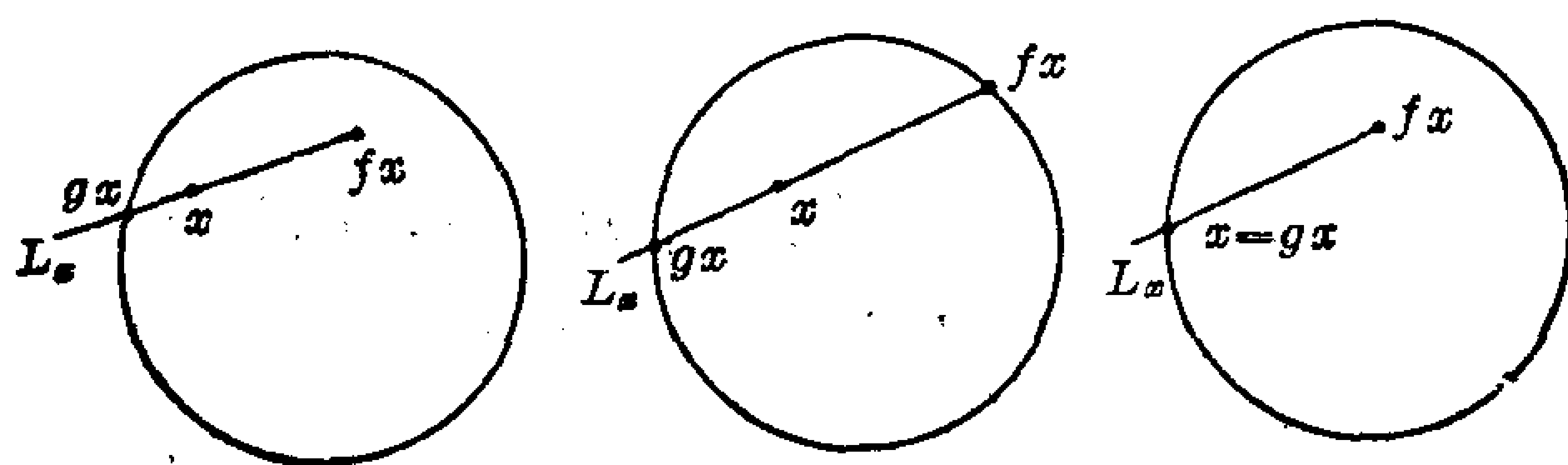


图 28.1

过 b 与m的直线，又令 K 为通过 c 与m的直线．选取fx_0的一个圆形邻域 N，使它不包含 H 或 K 的点．因 f 连续，就有 x_0 的一个圆形邻域 U' 使 $fU'\subset N$．现在选取 x_0 的一邻域 U，使 $\bar{U}$ 不包含 H 或 K 的点，并且 $U\subset U'$．则我们有如图 28.2 所示的情形：$\bar{U}$ 是 x_0 的一邻域，N 是 fx_0 的一邻域，$\bar{U}$ 与 N 都不与 H 或 K 相遇，以及 $f\bar{U}\subset N$．此外，一点 $x\in \bar{U}$ 以及它的象 $fx\in N$ 位于 H（并且也是 K）的两侧，因 x_0 与 fx_0 位于 H（并且也是 K）的两侧，并且 $\bar{U}$ 与 N 都是不与 H（以及 K）相遇的连通集．

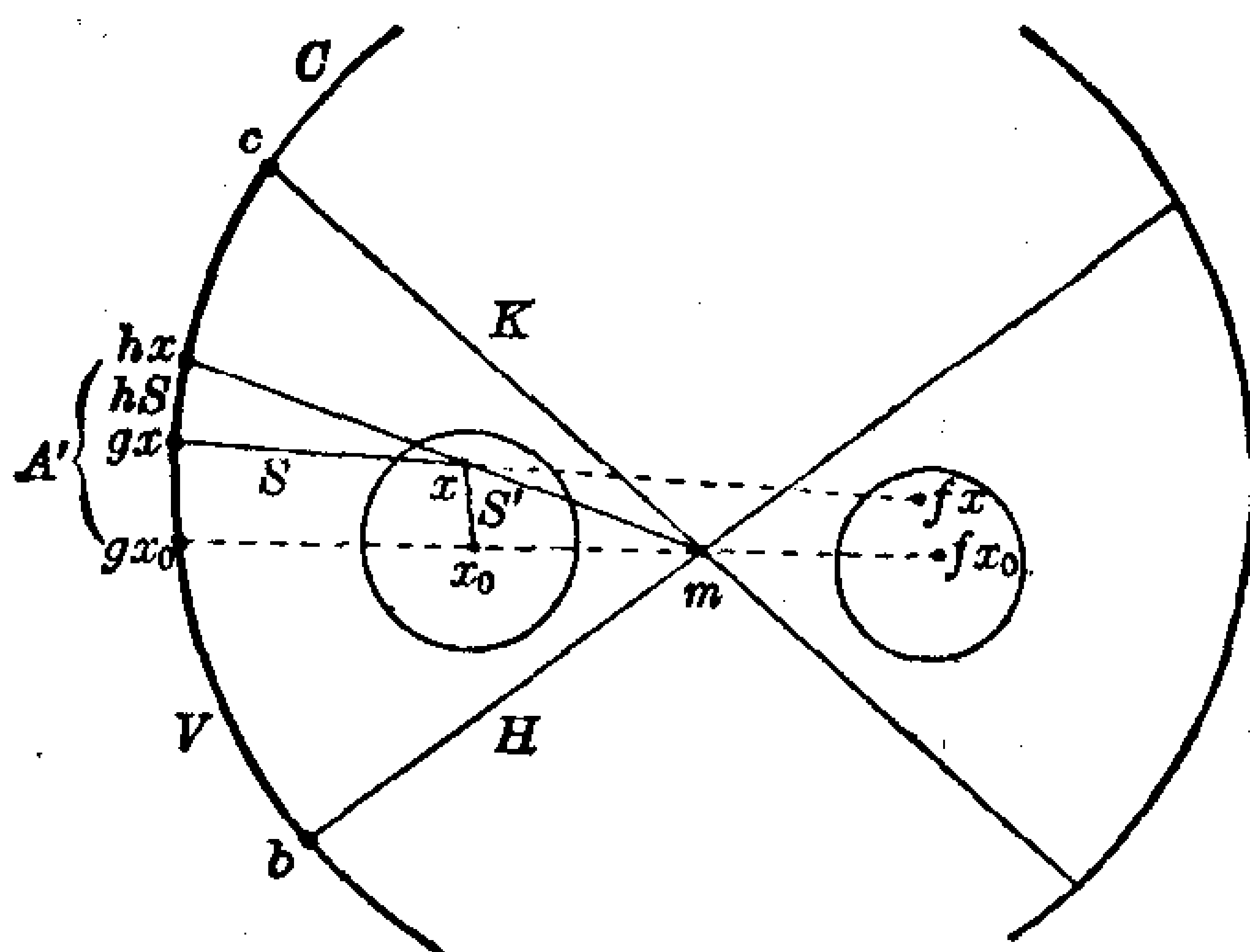


图 28.2

因此从 fx 出发经过 x 的射线 L_x，与 H 以及 K 两者都在 fx 与 x 间相遇．所以 L_x 上从 x 到 gx 这线段不包含 H 或

K 的点. 令 h 表示从 m 映到 C 的径向射影. 因 m 在 L_{x_0}上, h 把 x_0 映成 gx_0. 现在 h 把从 x_0 到 x 这线段 S' 映成 C 的从 gx_0 开始的一条弧 A'. 因为 S' 不与 H 或 K 相遇, A' 不能包含 b 或 c. 因而 A' 完全在 V 中, 故 $hx\in V$. 因为 S 不与 H 或 K 相遇, 与前面一样, 随即有 $hS\subset V$. gx 的从 m 到 C 的径向射影是 gx; 即 $hgx=gx$. $gx\in S$, $gx=hgx$, $hS\subset V$ 这三个断言的结合蕴涵 $gx\in V$, 而这就完成了 g 的连续性的证明.

习　题

1. 令 D 为以 z 为中心, 以 r 为半径的圆片. 求下列 D 的每一个自映射的不动点:
   (a) 绕中心的旋转,
   (b) 对于一直径的反射,
   (c) 向着中心的一个收缩的相似变换,
   (d) 收缩成原来大小的一半, 继之作 $\frac{1}{3}r$ 的平移,
   (e) 对于一铅垂直径的反射, 继之以向着 z 收缩到它大小的一半, 继之以向右 $\frac{1}{3}r$ 的平移.
   (f) 把以 z 为起点的每条射线映成为以 z 为起点的一条射线, 但使后者与水平线的夹角两倍于原来的夹角, 具有相似比 $\frac{1}{2}$, 并向左平移 $\frac{1}{3}r$.
2. 证明: 如果 E 与 D 同胚, 则任一映射 $E\to E$ 有一不动点.

29. 向 量 场

平面或空间中的一个向量是一对有顺序的点. 习惯上用连接两点的一条有向线段来表示一个向量, 其方向用从第一

点指向第二点的箭头表明．向量的代数性质使得向量成为研究高维欧氏空间几何必不可少的工具．在数学物理中，用向量来表示力、速度以及加速度，也非常重要．

我们将要运用速度向量这一概念，来帮助我们直观地领会下面几节中所要证明的定理．如果一动点通过一点 x，它在 x 处的速度向量是以 x 为起点、以运动的瞬时方向为指向而长度为瞬时速率的这个向量 v．如果这点以同一速率在同一方向继续运行一单位时间，它就会到达 v 的终点 x'．常速（即常方向与常速率）只是最简情况，但我们必须考虑动点沿一曲线的运动．这时，当点沿曲线移动时，它的方向与速率通常会改变．曲线每一点处的速度向量切于这曲线，指向与曲线的方向相同，它的长度是瞬时速率（（弧长）/（时间）在时间趋近于0时的极限）．例如，设一质点沿一曲线运动，在 t 单位时间时，它在曲线的点 t 处，$t=0, 1, 2, 3, \cdots$（图 29.1 左）；而附在各点的切向量表示质点在这些点处的速度（图 29.1 右）．于是，在点 1 与 2 处较小的速度向量，符合于从 1 到 2 以及从 2 到 3 较短的距离；其它各点处的切向量表明点 3 处的速度突增，点 4 处减速而在点 5 处高速，等等．

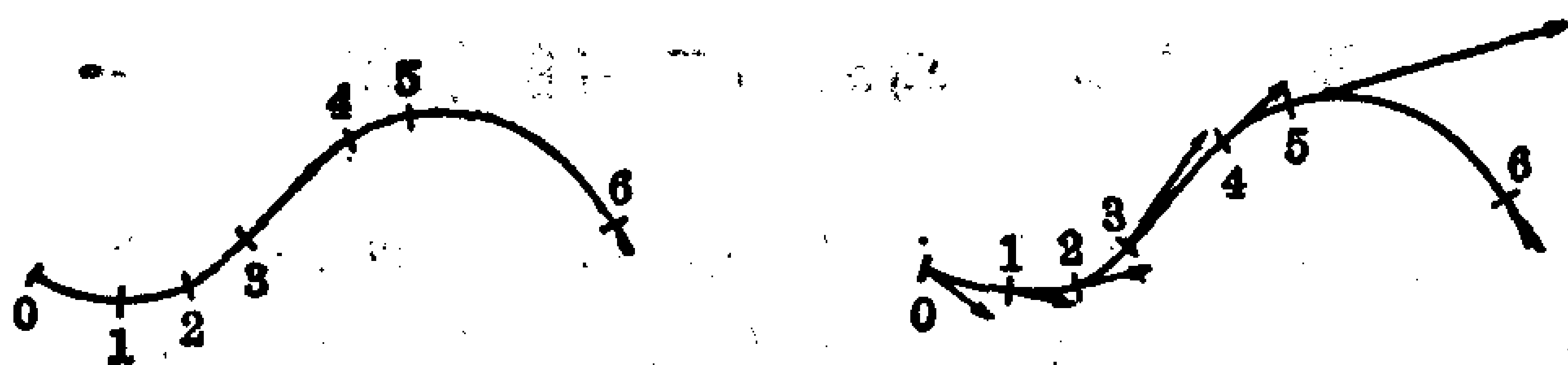


图 29.1

向量场 v 是一个函数，它对于平面（或空间）一个区域的每一点 x，指定一个以 x 为起点的向量 vx．如果考虑流动的液体或气体，不同质点在单独一瞬时的速度向量形成一个向量场．例如在一个以不变速度和定常方向的稳定流体中，

向量都平行而等长. 作为另一例, 考虑平面绕着一点 z 作常角速度的旋转(见图 29.2). 在一点 x 处, vx 垂直于连接 z 与 x 的直线, 而其长度与 $d(z, x)$ 成比例. 向量 vz 是有序的一对点 (z, z); 它无方向而长度为零. 这样的一个向量叫作零向量.

一流动液体的向量场在所有时刻都相同时, 叫作稳定流. 明确地说, 速度向量仅依赖于质点在平面(或空间)中的位置, 而不依赖于时间. 在不同时刻通过同一点的两质点在该点有同一速度向量. 上面讨论的两例, 都是稳定流的例. 这样的流有流线, 都是质点的道路. 它们形成一曲线族, 使得通过每一点仅有一曲线, 并且在该点处的速度向量切于曲线. 沿任何流线的质点始终在该流线上. 能把流线当成是沿它自身的滑动. 在上面的第一例中, 流线形成一族平行线. 在第二例中, 它们形成以 z 为中心的一族圆. 通过 z 的流线是在 z 处的常曲线.

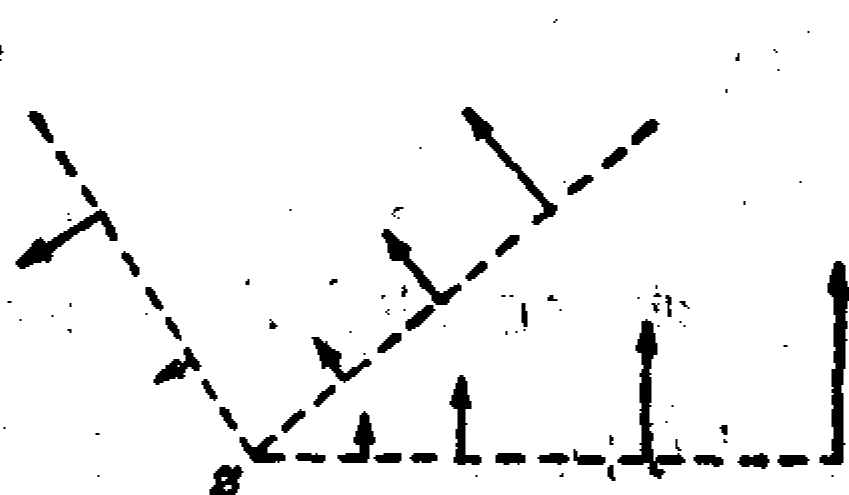


图 29.2

30. 向量场与映射二者的等价

乍一看, 要用数学方法来处理向量场, 似乎是相当困难的. 但是按照下列方式, 向量场的概念完全等价于映射的概念. 设 $f: A \to P$ 为从平面的一子集 A 到平面的一个映射. 令 o 为 P 的一固定参考点, 称它为*原点*. 对于每个 $x \in A$, 令 vx 为从 x 出发的向量, 它与从 o 到 fx 的向量平行且等长. 于是对于每个映射 f 规定了一个向量场 v. 反之, 如果在 A 上已给定了一个向量场 v, 就能定义 f 如下: fx 是

以 o 为起点的、并且与 vx 平行而等长的向量的终点. 容易看出,向量场与映射二者之间的这个对应是一对一的.

能用两向量等价这概念来弄清这个对应. 两个向量称为等价的向量,如果它们平行,等长且有同样的指向. 如果其中一个为零向量,则只有两个都为零时才等价. 现在如果 v 是一个向量场, x 处的向量 vx 等价于 o 处的唯一一个向量,而这向量由它的终点 fx 唯一确定. 反之,如果 $f:A\to P$ 是一映射,我们就能获得对应的向量场 v 如下:定义 vx 为 x 处的、并且等价于从 o 到 fx 这向量的向量.

图 30.1 的左图,画出了半径为 r 的圆 C 上的向量场,由各点处长为 $\frac{1}{2}r$ 并且指向逆时针的切向量组成. 图 30.1 的右图,画出了对应的映射的像. 这时候 f 是一个相似变换:把

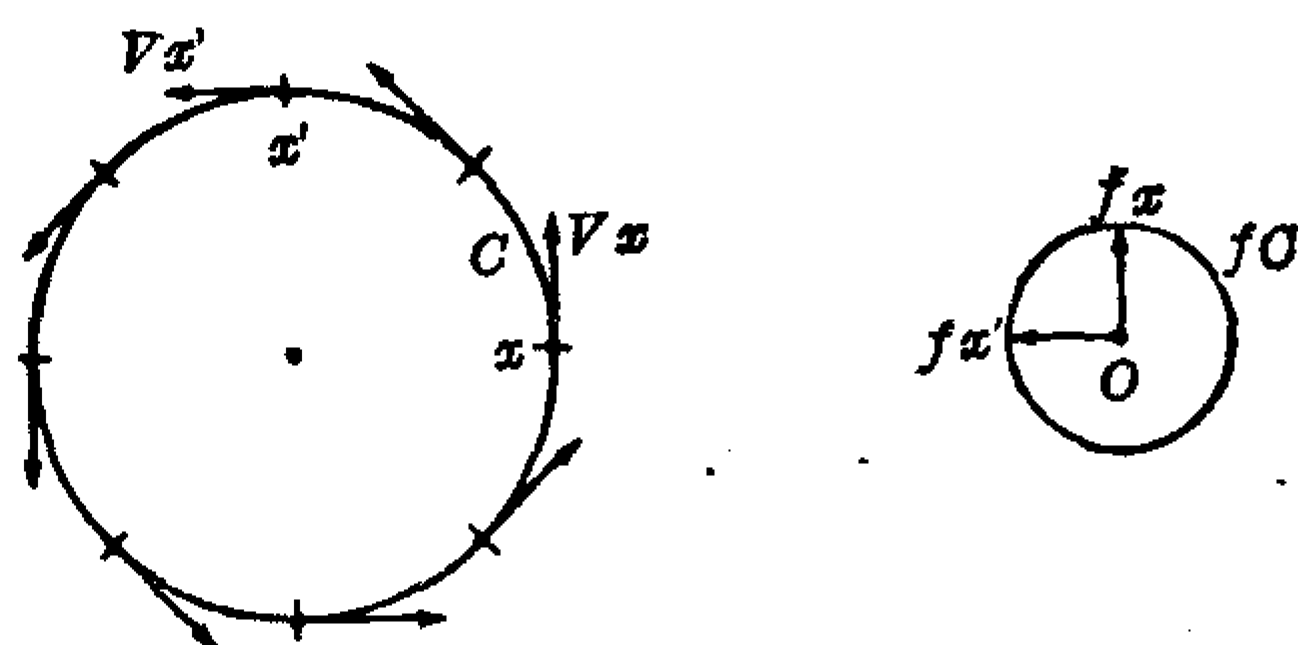


图 30.1

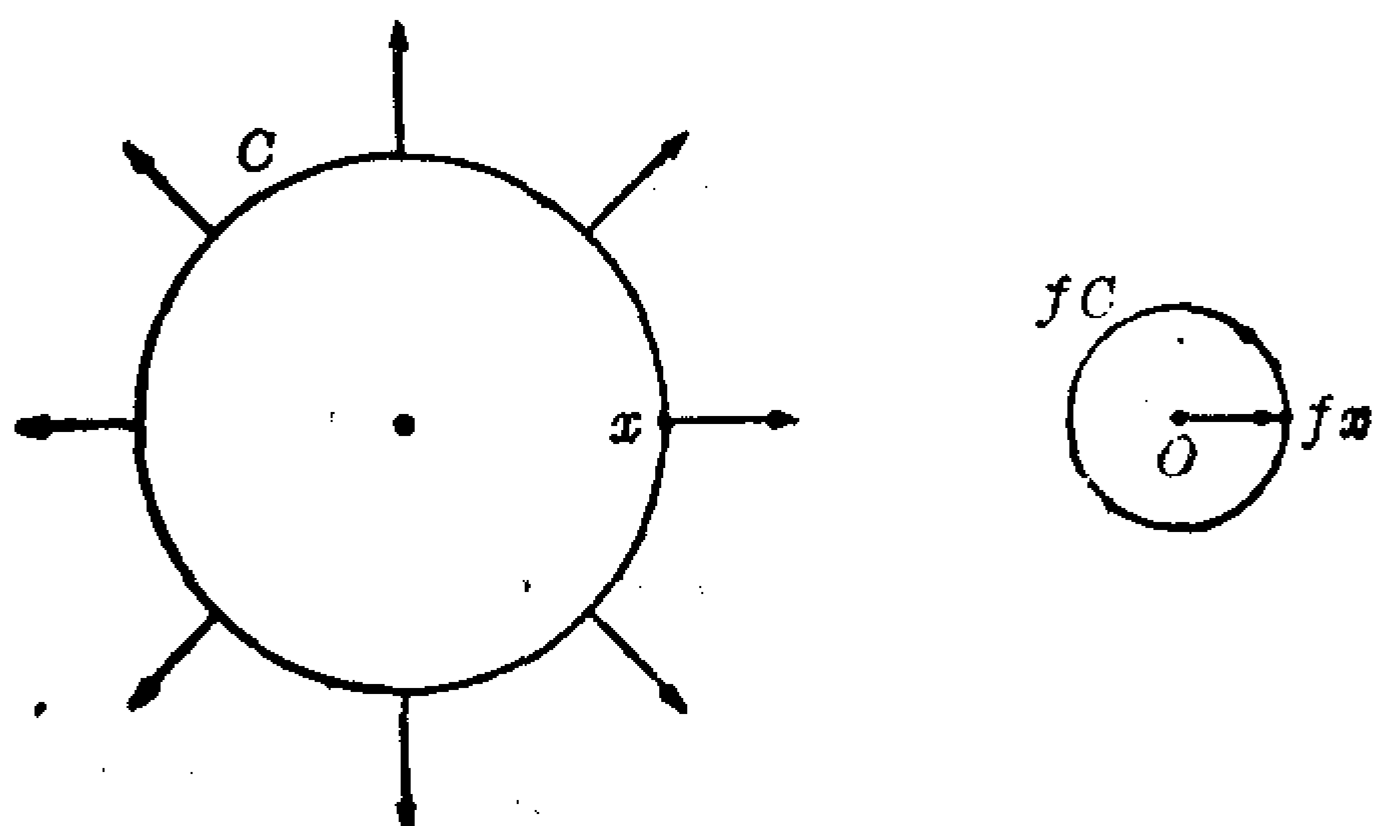


图 30.2

C 收缩到以 o 为心，大小为 C 的一半的圆，并且把 C 旋转了 $90°$. 图 30.2 画出了一个外向的，长为 $\frac{1}{2}r$ 的法线场. 这时，f 把圆缩小一半，但不旋转. 具有等长的内向法线场会给出另一个 f，它是上面的那个 f 再加上绕 o 旋转 $180°$.

在 f 是常函数，把 A 的全部映到单独的一点时，对于全部 $x\in A$，象 fx 是同一点. 于是对于全部 $x\in A$，有序的点对 (o, fx) 都相同，并且对应场的全部向量都平行，都有同一长度与同一指向. 这样的场叫作*常向量场*.

因为向量场与映射间的一对一的对应，我们能把为映射而定义的概念和性质转用到向量场. 例如，如果一向量场 v 的对应函数 f 连续，我们就称 v *连续*.

习　　题

1. 对于下列从 P 到 P 的各个映射，说明对应的向量场或画出图形：
   (a) f 将 P 的全部点映成非原点的单独一个点；
   (b) f 为恒同映射；
   (c) f 为绕原点的 $180°$ 旋转；
   (d) f 将所有点按一固定方向平移一固定距离；
   (e) f 为对于过 o 的一直线的反射.

31. 一向量场沿着一闭曲线的指数

令 v 表示平面 P 的子集 A 上的一连续向量场，又令 $\varphi:[a, b]\to A$ 为 A 中的一闭曲线. 设想曲线是一动点所描出的. 在曲线的各个位置 x 处，向量 vx 有定义. 当动点描出这曲线时，向量将连续变化，旋转它的方向并改变它的长度. 当这点回到它的初始位置时，向量应恢复到它的初始方

向与长度．人们能问：当点走过这曲线时，向量的方向要旋转多少整圈．利用第 30 节的相应映射 $f:A\to P$，能够非常清楚地陈述这个问题以及它的答案．复合函数 $f\varphi:[a,\ b]\to P$ 是平面中的一闭曲线．如果原点 o 不在 $f\varphi$ 上，则围绕数 $W(f\varphi,\ o)$ 有定义．我们把它叫作向量场 v 沿着闭曲线 φ 的指数并且用 $I(v,\ \varphi)$ 表示．于是

$$I(v,\ \varphi)=W(f\varphi,\ o).$$

在图 30.1 的例中，显然有 $I(v,\ C)=1$．图 30.2 的例也一样对，而内向法线的第三例也一样．但是图 31.1 中的常向量场的指数是零．图 31.2 给出沿着一圆的指数为 2 的一向量场．

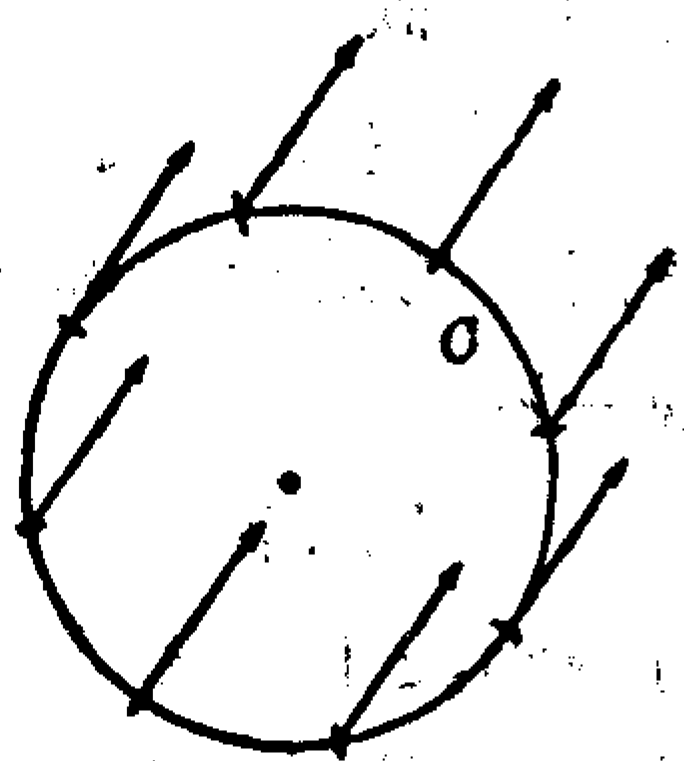


图 31.1

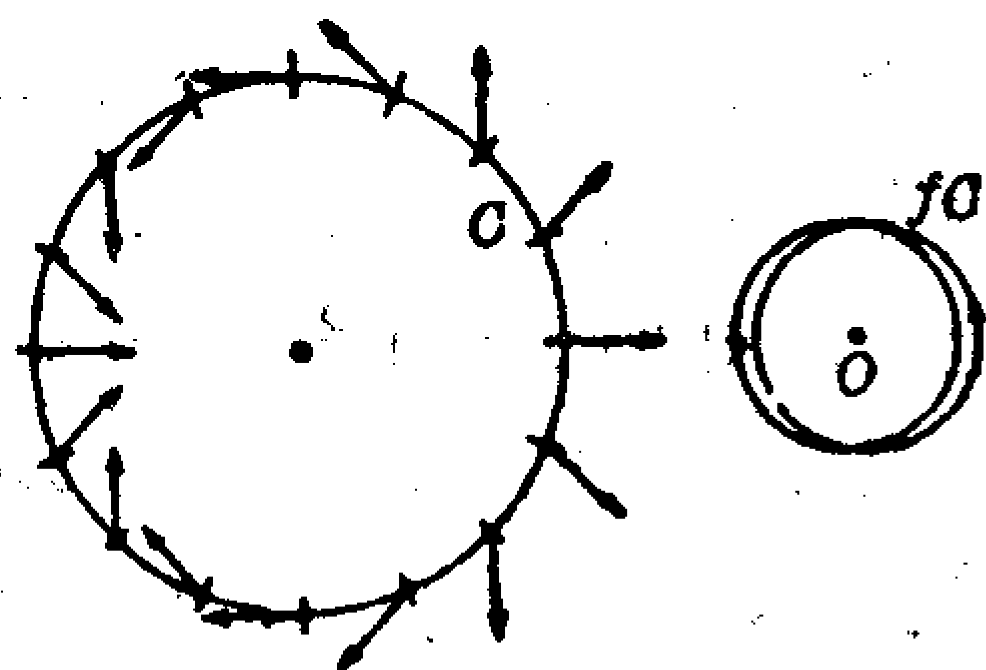


图 31.2

定理 31.1 令 v 为定义在平面中一圆片 D 上的一连续向量场，并且使得 D 的边界圆 C 上的任一点 x 处的向量 vx 不是零向量．如果 v 的沿着 C 的指数 $I(v,\ C)$ 不是零，则在 D 中至少有一个点 x，它那里的向量 vx 是零．

把第二编主要定理的"映射"语言，翻译成"向量场"语言，恰好就是本定理．令 $f:D\to P$ 为对应于场 v 的映射，并且令 $\varphi:[0,\ 1]\to C$ 为把 C 作为闭曲线的标准表示法．由假设

$\overline{W}(f\varphi, o)=I(v, \varphi)$不是零．主要定理断言：方程 $fx=o$ 至少有一解 x．于是对应的 vx 必是零向量，因为它等价于从 o 到 o 的向量．

定理 31.2 令 v 为定义在圆片 D 上一连续的非零向量场．于是在 D 的边界 C 上，至少有一点 x，在该处的 vx 是一外法线，至少有一点 x'，在该点处的 vx' 是一内法线，并且 C 上至少有两个点，在那些点处的向量都与 C 相切．一般地，对每个角 α，至少有一点 $x\in C$，使得 vx 与在 x 处的外法线夹角为 α．

这些结论的成立，主要由于 v 在 D 内部非零这一假设．例如，令 D 的中心为 o，令 $f:D\to P$ 为恒同映射．对应的 v 正好有一个零在 D 的中心．定理的结论在这里不成立；因为在 C 的每点 x 处，vx 都是外法线．常向量场是一个说明这定理的好例子(图 31.1)；各 α 恰好出现一次．

只需要证明定理 31.2 的最后结论，因为它蕴涵前面的各结论．只要令 $\alpha=0°$ 与 $\alpha=180°$，就分别得到关于外法线与内法线的结论，令 $\alpha=90°$ 与 $270°$ 就得到关于切线的结论．

为证明这最后结论，令 α 固定．选取 D 的中心为原点 o，又令 $f:D\to P$ 为场 v 的对应映射．用 g 表示 P 绕着 o 转过角 $-\alpha$ 的旋转．用 h 表示从 o 到盖满 C 的径向射影．因 v 永不为零，fD 与 gfD 不会包含 o．从而 $hgf:D\to C$ 有定义．因为 $C\subset D$，hgf 能看成为一映射 $D\to D$．定理 28.1 断言：hgf 至少保持一个点不动；那就是，存在一点 $x\in C$ 使 $hgfx=x$．令 $v'x$ 为在映射 hgf 作用下对应于 x 的向量．由定义，它平行于从 o 到 $hgfx=x$ 的向量．所以 $v'x$ 是在 x 处的外法线．但对于 D 的任一点 y，vy 与 $v'y$ 怎样区别呢？因为我们

得到 hgf，是首先运用 g 到 f，然后运用 h 到 gf，从而得到 $v'y$，它是先把 vy 绕着 y 转过角 $-\alpha$，然后把长度改为 C 的半径长．于是，在 C 上的固定点 x 处，向量 vx 与 $v'x$ 的夹角一定是 α，其中 $v'x$ 已说明是外法线．

推论 如果 v 为圆片 D 上一连续向量场，又如果在 C 上 v 永不与 C 相切(或永不为 C 的法线)，则在 D 中 v 至少有一个零．

前面的结果在稳流的研究中是重要的．向量场的零只发生在流中保持不动的点处．设圆片上的向量场是这样的向量场，在其边界 C 上，场为内法线．流体显然在 C 的各点处流入 D．直观告诉我们流体必在 D 内某处堆积．因为场没有与 C 相切之处，上述推论告知我们，流体能汇集在流的至少一个不动点处．

习　题

1. 令圆片 D 的中心为 z，对于每个点 $x\in D$，令 vx 为定长 s 的向量，其指向是沿着从 z 到 x 的射线．则在边界 C 上，各 vx 是外法线，不存在内法线，并且也没有 vx 与 C 相切的点．这是否与本节第二个定理的结论相矛盾呢？
2. 对圆片 D 的下列各映射，求场的沿着 C 的指数，求点 $x\in D$，其 vx 为零，求点 $x\in C$，其 vx 切于 C，其 vx 或为 C 的外法线，或为 C 的内法线．

   (a) f 把 D 的所有点映成中心 z(并且 $o\neq z$)；

   (b) f 是恒同映射并且 o 是中心 z；

   (c) f 是恒同映射并且 o 是在距 z 为 $r/2$ 处；

   (d) f 是恒同映射并且 $d(o, z)>r$；

   (e) f 是绕着中心的 $180°$ 的旋转，而 o 是 D 的一个外点；

(f) f 由一固定向量所规定的平移并且 o 是在 fD 之外;

(g) f 是对于一选定直径的反射并且 o 在 z 处.

32. 球到平面的映射

我们说球 S, 指的是空间中与一点 z(中心)的距离为一固定正数 r(半径)的点的全体. 如果 $x \in S$, x 的对径点 x' 是连接 x 与 z 的直线与 S 的另一交点, 即 S 的一直径交 S 于相对的两点 x 与 x'.

如果用垂直射影 f 把球 S 映到一平面 P, 则有一对对径点 x 与 x' 使得 $fx = fx'$, 即过 z 而垂直于 P 的直线与 S 的一对交点. 奇怪的是, 这结果的一部分, 对于 S 映到 P 的任何映射都成立. 下面类似于定理 10.1 的定理是数学家 K. Borsuk 和 S. Ulam 在 1933 年发现的.

定理 32.1 球到平面的每一个映射 $f: S \to P$ 把 S 的某对对径点映成同一点; 也就是, 对于至少一对对径点 x 与 x', $fx = fx'$.

为了证明定理, 随意选取 P 中一点 o 作为原点. 定义从 S 到 P 的一个对应 $g: S \to P$ 如下: S 的任一点 x 决定了它的对径点 x' (图 32.1), 并且 f 决定了 fx 与 fx' 以及从 fx 到 fx' 这向量; gx 是等价于这向量的、以 o 为起点的那向量的终点. 于是 $g: S \to P$ 有性质: 对于每个 $x \in S$, gx' 与 gx 关

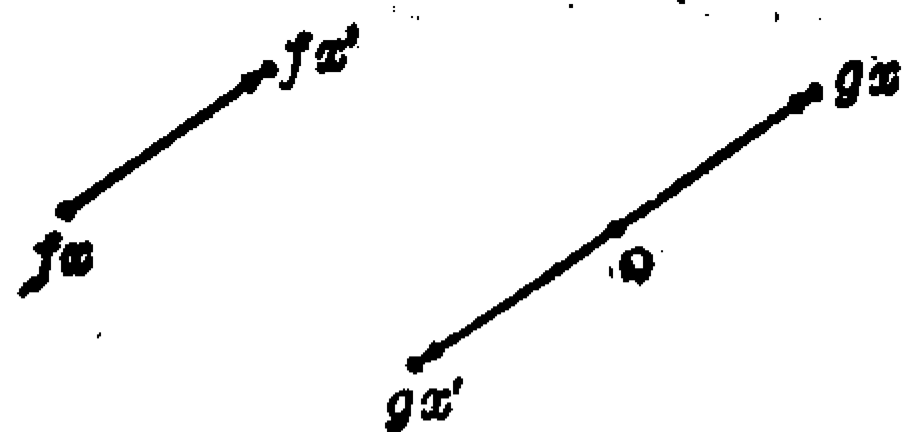


图 32.1

于 o 对称；因为 x 为 x' 的对径点，只要把从 fx 到 fx' 的箭头反转过来，就得到 gx'. 只要能证明 g 把 S 的某点映成 o，定理就证明了；因为只有这样，向量与它的反向量才重合.

假定已知 g 连续；这在以后会证明的. 令 P' 为通过 S 的中心 z 的一个固定平面，令 C 表示 P' 与 S 相交的圆，又令 D 为以 C 为边界的 P' 中的圆片. 如果象 gC 包含 o，即存在 S 的一点 x 使得 $gx=o$，定理就证明了. 所以现在只需要考虑 gC 不包含 o 的情形. 令 H 为 S 被 P' 所分成的两个半球中的一个，又令 $\psi: D\to H$ 为 H 到 D 的垂直射影的逆映射，则复合映射 $g\psi: D\to P$ 在边界 C 上与 g 重合. 令 φ 为 C 作为闭曲线的标准表示法(第 16 节). 证明围绕数 $W(g\varphi, o)$ 不是零，本定理就证明了. 因为一旦知道围绕数不是零，主要定理(第 18 节)就向我们保证：D 中存在一点 y 使 $g\psi y=o$，并且这点 y 给出 S 的点 $x=\psi y$ 满足 $gx=o$.

我们将说明 $W(g\varphi, o)$ 是奇整数(回忆零是偶数，因为 $2\cdot 0=0$)，来证明 $W(g\varphi, o)\neq 0$. 令 φ_1 与 φ_2 为 φ 在子区间 $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ 与 $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ 的限制. 令 $x_0=\varphi 0=\varphi 1$；则它的对径点 $x_0'=\varphi\frac{1}{2}$. 此外，φ_1 表示 C 的一个半圆，作为从 x_0 到 x_0' 的曲线，φ_2 表示另一个从 x_0' 到 x_0 的曲线. 现在选取 $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ 的一划分，对于曲线 $g\varphi_1$ 关于 o 它是充分细的，并利用第 22 节的结果来计算 $A(g\varphi_1, o)$，得

$$A(g\varphi_1, o)=u-v+(r-s)360,$$

其中 $r-s$ 是整数，而 u 与 v 分别是从 o 到 gx_0' 与从 o 到 gx_0 的两射线在量角器上的读数. 因为 x_0, x_0' 是对径点，gx_0', o, gx_0 这三点都在一直线上；因而 $u-v$ 为平角的测量度数，

即 $u-v=\pm 180$. 从而 $A(g\varphi_1, o)$是 180 的奇数倍:

$$A(g\varphi_1, o)=(2m+1)180.$$

图 32.2 表明倍数为 -3 的情形.

其次考虑从 gx_0' 回到 gx_0 的曲线 $g\varphi_2$. 令 $h:P\to P$ 为绕 o 转过 $180°$ 的旋转. 如果 $t\in\left[0, \frac{1}{2}\right]$, 则 $t+\frac{1}{2}\in\left[\frac{1}{2}, 1\right]$, 与 $\varphi_2\left(t+\frac{1}{2}\right)$ 是 $\varphi_1 t$ 的对径点. 从而由 g 的对称性,有

$$g\varphi_2\left(t+\frac{1}{2}\right)=hg\varphi_1 t, \text{ 对所有的 } t\in\left[0, \frac{1}{2}\right].$$

也就是说, 曲线 $g\varphi_2$ 是由曲线 $g\varphi_1$ 经过 $180°$ 旋转而得 (看图 32.2). 因为旋转保持角度, $A(g\varphi_1, o)=A(g\varphi_2, o)$. 运用 A 的可加性质,得

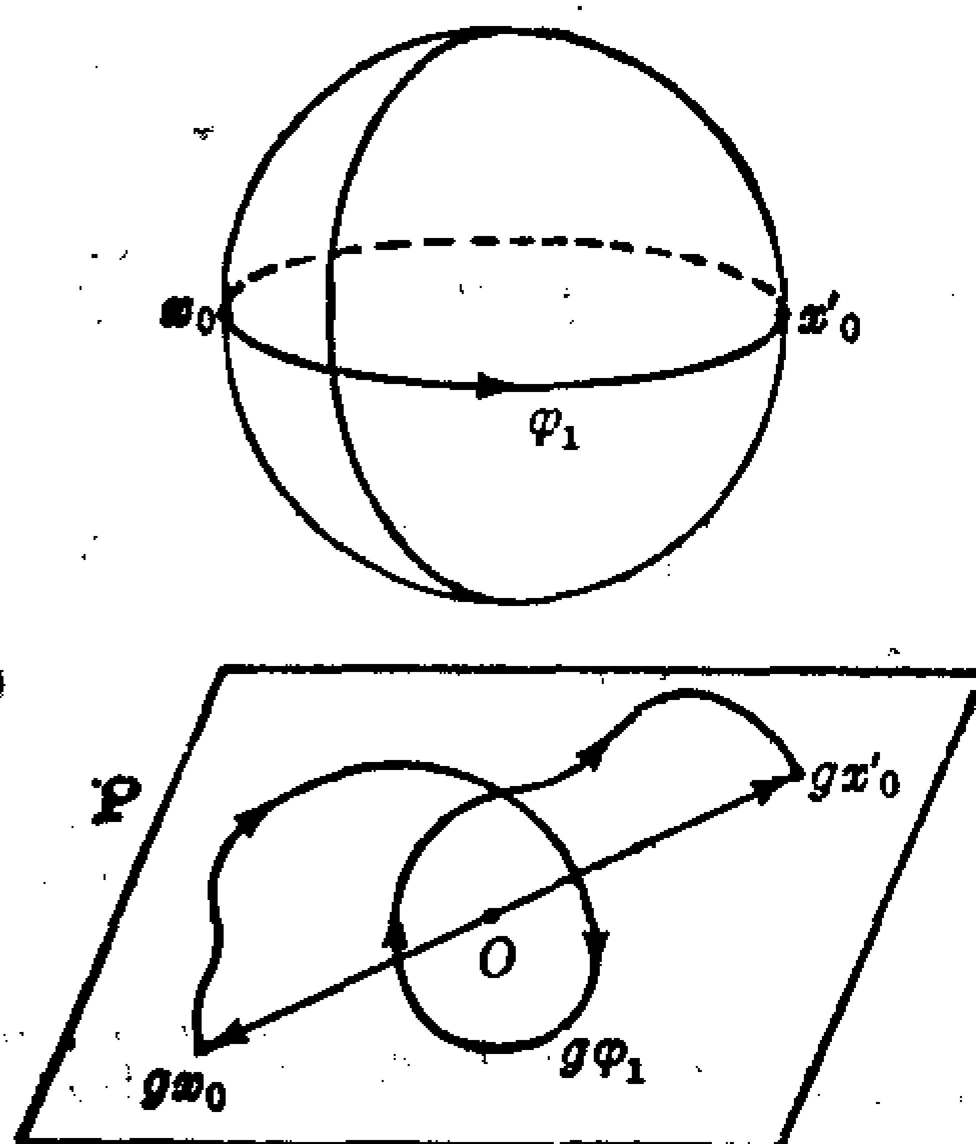


图 32.2

$$\begin{aligned}A(g\varphi, o)&=A(g\varphi_1, o)+A(g\varphi_2, o)\\&=2A(g\varphi_1, o)\\&=2(2m+1)180\\&=(2m+1)360,\end{aligned}$$

因此

$$W(g\varphi, o)=A(g\varphi, o)/360=2m+1.$$

这就完成了 $W(g\varphi, o)$是奇数的证明.

g 的连续性还待证明. 令 x_0 为 S 的一点, 又令 N 为 gx_0 的、半径为 r 的圆形邻域. 令 U, U' 分别为 fx_0, fx_0' 的圆形邻域,其半径都为 $r/2$. 因 f 连续,分别有 x_0, x_0' 的邻域 V, V' 使 $fV\subset U$ 与 $fV'\subset U'$. V' 的点的对径点集合 T 是 x_0 的一邻域; 令 W 为包含于 V 与 T 两者之中的 x_0 的邻域. 于

是，若 x 是 W 中一点，我们有 $x \in V$ 与 $x' \in V'$；从而有 $fx \in U$ 与 $fx' \in U'$. 令 y 为 P 的点，使得由 fx_0 到 y 的向量等价于由 fx 到 fx' 的向量(看图 32.3). 既然由定义，从 o 到 gx 的向量也等价于从 fx 到 fx' 的向量，而从 o 到 gx_0 的向量等价于从 fx_0 到 fx'_0 的向量，可见距离

$$d(gx,\ gx_0) = d(y,\ fx'_0).$$

由三角形不等式，这距离所以小于或等于

$$d(y,\ fx') + d(fx',\ fx'_0).$$

从平行四边形，$d(y,\ fx') = d(fx_0,\ fx)$，并且这个距离与 $d(fx',\ fx'_0)$ 两者都小于 $r/2$；所以它们的和小于 r. 这就蕴涵着 $gx \in N$. 因而 g 把 W 映入 N. 这证明了 g 的连续性，于是完成了定理的证明.

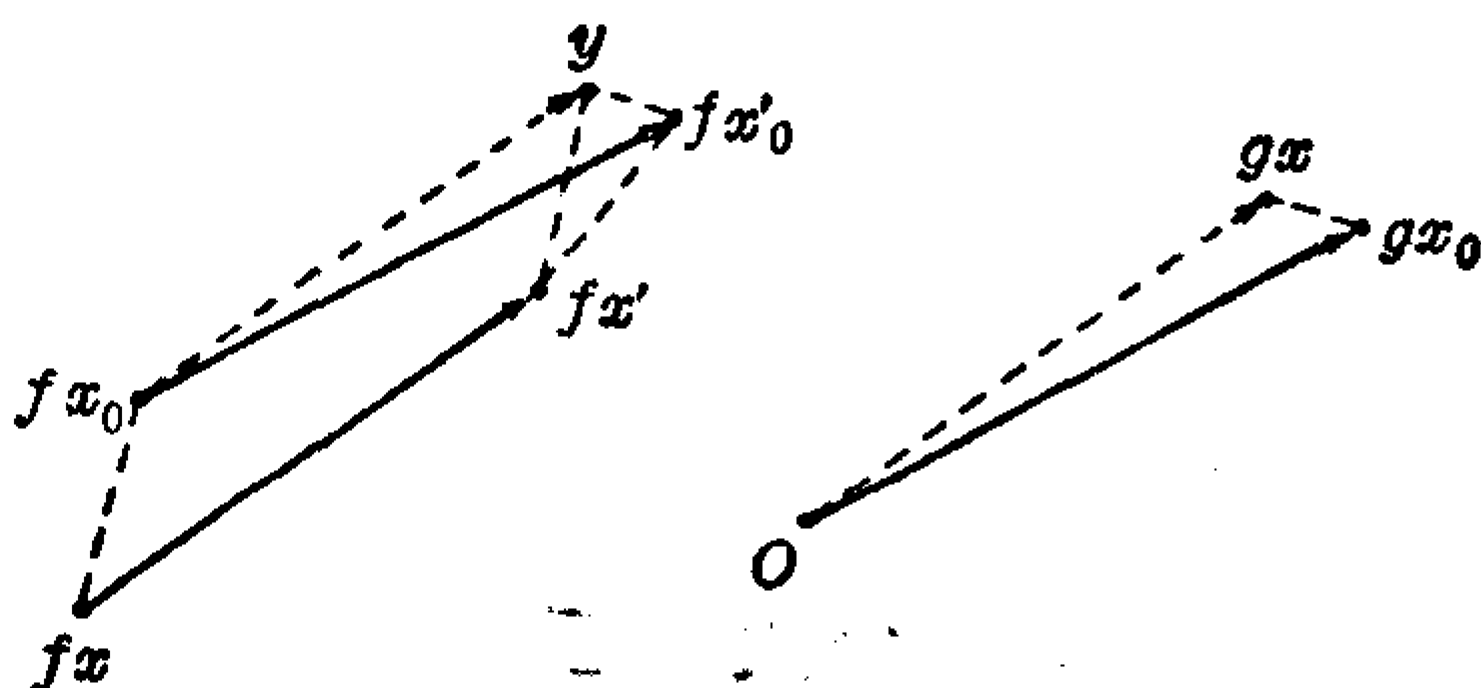


图 32.3

我们来给出一个应用. 设地球表面为一球面 S，并且在任何瞬时，气压 px 与气温 tx 都是 $x \in S$ 的连续函数. 在平面 P 中，选取一原点，过该点的两条互相垂直的有向直线以及一量度单位，作成直角坐标系. 对于 S 的任一点 x，令 fx 为 P 的点，其坐标是 $(px,\ tx)$. 因为 p 及 t 连续，从而 $f: S \to P$ 连续. 现在把定理应用到这个 f，就得到

推论 在各瞬时，地球表面有一对对径点，在该两点处的气压相等，并且气温也相等.

显然气压与气温的物理性质都与结论无关；p 与 t 可以是任何两个定义在 S 上的连续实值函数。

也可注意，如果考虑一个单独的函数，例如气温，则定理10.1告诉我们，在每一个大圆上有一对对径点，该两点处的气温相等。

习　　题

1. 令 S 为 R^3 中的球，以 r 为半径，以直角坐标系(x_1, x_2, x_3)的原点为中心 z. 令 P 表示(x_1, x_2)平面，又令 L 表示 x_1 轴. 试求在 $f:S\to P$ 作用下具有同一象点的诸对对径点，如果 f 是(a)S 映到 L 的垂直射影(所有投射线都垂直于 L)；(b)S 先绕着 L 旋转 $90°$，然后跟着一个到 P 的垂直射影这二者的复合函数.
2. 如果对径点用经过 S 内部非中心点的 Q 的直线所定义，证明 Borsuk-Ulam 定理的结论仍成立.
3. 如果把球面换成椭球面或方盒面，并且对径点关于中心对称，求证定理的结论成立.

33. 分火腿三明治

本节定理系定理11.1的三维推广. 该定理说，平面中任何一对有界连通区域能被单独的一条直线恰好分成两半(面积相等的两半).

定理33.1　令 A, B, C 为空间中三个有界连通开集. 则存在单独的一个平面，它把每一个都恰好分成体积相等的两半.

三个球体以及通过它们中心的平面提供了一个例子. 定

理的力量在于，即使区域不规则它也成立．如果把 A, B 解释为面包片而 C 为夹在它们之间的火腿，则结论能解释为：能把火腿三明治用一刀切开，使得两片面包与一片火腿都恰好分成两半．

为着证明此定理，先选取包含 A, B, C 的一个球 S．存在着这样一个球，因为 A, B, C 都有界．令球的中心为 z，半径为 r．对于各 $x\in S$，令 L_x 表示过 z 与 x 这直径的直线．我们将证明：

(1) 对于各 $x\in S$，在 L_x 上存在着恰好一个点 x_A，使得在 x_A 处垂直于 L_x 的平面把 A 按体积分成两半．

一旦证明了这一事实，就令 $g_A x$ 为距离 $d(z, x_A)$，它附有正号，如果 x_A 在由 z 到 x 的线段上，而附有负号如果 x_A 在由 z 到 x 的对径点 x' 的线段上．因为 L_x 与 $L_{x'}$ 重合，并且在 L_x 与 $L_{x'}$ 所取的坐标系的指向相反，又因为 $x'_A=x_A$，所以

$$g_A x' = -g_A x.$$

用 B 与 C 分别替代 A，用类似的方式分别定义 x_B, $g_B x$ 与 x_C, $g_C x$．现在考虑映射 $f: S\to R^2$，对各 $x\in S$，规定象点的坐标为

$$fx=(g_A x-g_B x,\ g_A x-g_C x).$$

我们将证明：

(2) f 连续．

一旦证明了(1)与(2)，就能很快地完成定理 33.1 的证明如下．由定理 32.1，存在一点 x 使 $fx=fx'$．从 fx 与 fx' 的坐标相等，得到

$$g_A x-g_B x=g_A x'-g_B x',$$
$$g_A x-g_C x=g_A x'-g_C x'.$$

再凭借上面已说明的关系 $g_A x'=-g_A x$, $g_B x'=-g_B x$ 以及

$g_C x' = -g_C x$，第一个方程化简为 $g_A x = g_B x$ 而第二个为 $g_A x = g_C x$. 因而，对于点 $x \in S$，它的象与它的对径点 x' 的象重合的，有 $x_A = x_B = x_C$，并且在这点 x 处垂直于 L_x 的平面把所有三个区域分成两半.

为着证明(1)，对各点 $y \in L_x$，令 P_y 表示过 y 而垂直于 L_x 的平面. 考虑 A 的、与 x 在 P_y 的同一侧的那部分；令 hy 表示它的体积. 当 y 从 x' 变到 x 时，hy 从 A 的体积变到零. 若 y_1, y_2 都在 L_x 中，差 $|hy_1 - hy_2|$ 至多是实球在两平面 Py_1 与 Py_2 之间的那部分体积，而这是小于 $\pi r^2 |y_1 - y_2|$ 的. 这证明 h 在 L_x 的各点 y 处连续(取 $\delta = \epsilon/\pi r^2$). 所以第一编的主要定理保证，存在一点 y 使 hy 是 A 的体积的一半. 如果有两个这样的点，那将会有两个平行的平面 P_1 与 P_2 都把 A 分成两半. 空间在 P_1 与 P_2 之间的那块厚片 Q，将其余的空间分成两个不连通部分. 因为 A 是连通的，并且在各部分有它的一半体积，A 必包含 Q 内部的一点 q. 因为 A 与 Q 都是开集，就有 q 的一球形邻域 U 包含在 $A \cap Q$ 之中. 既然 U 有正体积，所以 $A \cap Q$ 也如此. 从 P_1 移到 P_2，hy 就改变了 $A \cap Q$ 那么大的体积，所以 P_1 与 P_2 都不能分 A 成两半. 这就证明了(1).

为着证明 (2)，f 的连续性，只要证明 f 的各坐标的连续性就够了. 我们将只证明 g_A 连续，其余的留给读者. 令 c 为 S 的一点，要证明在该点处 g_A 连续，又令 C_A 为 L_C 上的点，在该点处垂直于 L_C 的平面 P_c 切开 A 成两半. 令 x 为 S 上挨近 c 的点，又设 x_A, P_A 类似地定义. 图 33.1 显示出我们关心的图形与过 c, x, z 的平面的相交. 我们要证明，将 x 限制于挨近 c(在 $N(c, \delta)$ 中)，能使 $|g_A x - g_A c|$ 小于预定的 $\epsilon > 0$.

图 33.1

令过 c 与 x 的大圆交 P_c 于 u 与 v 两点. 令 P' 与 P'' 分别为过 u 与 v 而垂直于 L_x 的两平面. 令 N 表示 S 的内部. 与 c 在 P' 同侧的那部分 N 被包含在与 c 在 P_c 同侧的那部分 N 之中. 既然 $A\subset N$, 与 c 在 P' 同侧的 A 的那部分被包含在与 c 在 P_c 同侧的 A 的那部分之中. 所以, 如果以 V 表示 A 的体积, 与 c 在 P' 同侧的 A 的那部分体积至多是 $V/2$. 由类似的论证, 与 c 在 P'' 异侧的 A 的那部分体积, 至多是 $V/2$. 从而 P_x 必在 P' 与 P'' 之间. 所以, 若 w 是 P' 与 P'' 之间的距离, 我们有

$$|g_A x-g_A c|<w.$$

要得到 w 的大小的估计, 注意从两三角形的相似, 得

$$\frac{w}{d(u,\ v)}=\frac{d(e,\ x)}{d(z,\ x)},$$

其中 e 是 x 在 L_0 上的垂直射影. 因为 $d(z,\ x)=r$, 即得

$$w=\frac{d(u,\ v)}{r}d(e,\ x).$$

因为 $d(u,\ v)\leqslant 2r$, 并且 $d(e,\ x)\leqslant d(c,\ x)$, 得

$$w\leqslant 2d(c,\ x).$$

所以,
$$|g_A x-g_A c|<2d(c,\ x).$$

对于一已知 $\epsilon>0$，取 $\delta=\epsilon/2$；则 $x\in N(c,\delta)$ 蕴含着 $|g_A x-g_A c|<\epsilon$．这证明 g_A 在 c 处连续．因为这对各个 $c\in S$ 成立，从而 g_A 在 S 上连续．定理 33.1 的证明到此完成．

习　题

1. 设 A 是一个实心球，B 是立方体，C 是一实心柱体．描述把这三个立体都切成两半的一个平面．
2. 设 A 为实心球，B 为实心半球，其轴通过 A 的中心，而且 C 是任一第三个立体．在这情况下，试直接证明本定理．

34．一球面的切向量场

令 v 表示定义在空间一球面 S 上的一个向量场(见第 29 节)．对于 S 的每一点 x，它指定了一条以 x 为起点的有向线段．如果对于 S 的各 x，以 x 为起点的各线段都切于 S，或等价地，垂直于半径 zx，其中 z 是 S 的中心，我们就说场 v 是 S 的切向量场．如同第 30 节中那样，取一原点 o，并定义 gx 为从 o 出发而与 vx 平行且等长的向量的端点，这样来把 S 映入空间的一映射 g 与 v 配合．我们说，当配合的 g 连续时，v 就连续．

定理 34.1　令 v 为在一球面 S 上定义的并且与 S 相切的连续向量场．则 S 上存在至少一个点 x 使得 $vx=0$．

能把 S 的一个切向量场解释为一个流．定理蕴涵：球面上任一稳定流至少有一个静止点．举一个实际例子，设地球表面是一个球面，并且风流的速度向量是连续的．则在任一

瞬间，地球上的某一点处无风.

如果把一球绕着一轴以常角速度旋转，我们得到具有两个静止点的流.

为了说明定理，让我们作出 S 的一个切向量场，具有恰好一个零在点 x_0 处. 令 L 为 S 的过点 x_0 的一有向切线. 在任一不同于 x_0 的点 $x\in S$，由 x 与 L 决定一平面 P_x，它交 S 于圆 C_x. 给予 C_x 以相同于其切线 L 的指向. 定义 vx 为 P_x 中一向量，它以 x 为起点并且切于 C_x，长为距离 $d(x, x_0)$ 之半，而指向与 C_x 一致. 图 34.1 显示 P_x 中若干个切于 C_x 的向量；我们已把 L 的指向向上，于是 C_x 逆时针方向. 注意到当 x 趋近于 x_0 时向量越来越短. 规定 $v x_0=0$ 来完成 v 的定义而获得一连续场。

与一球面形成对照，环面(车轮内胎)具有无处为零的、连续的切向量场. 画出车轮内胎绕一轴旋转的速度场. 同样，画出一烟圈.

证明 选定一个过 S 的中心 z 的平面 P. 令 C 表示圆

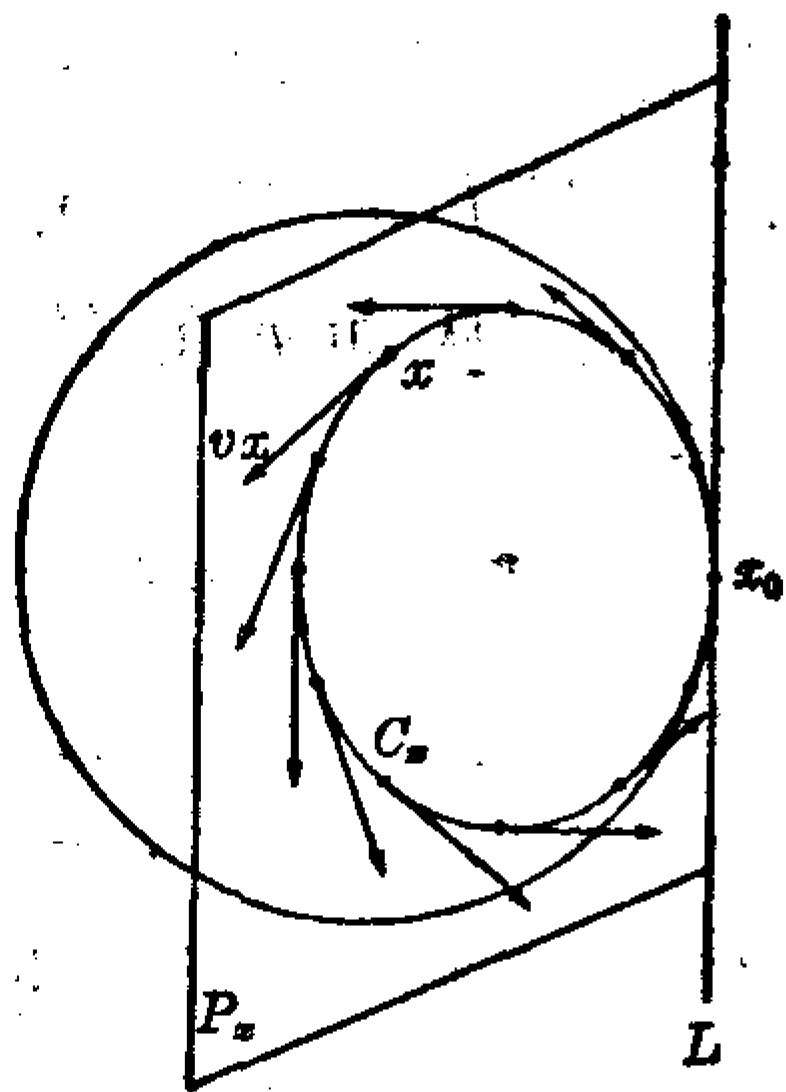


图 34.1

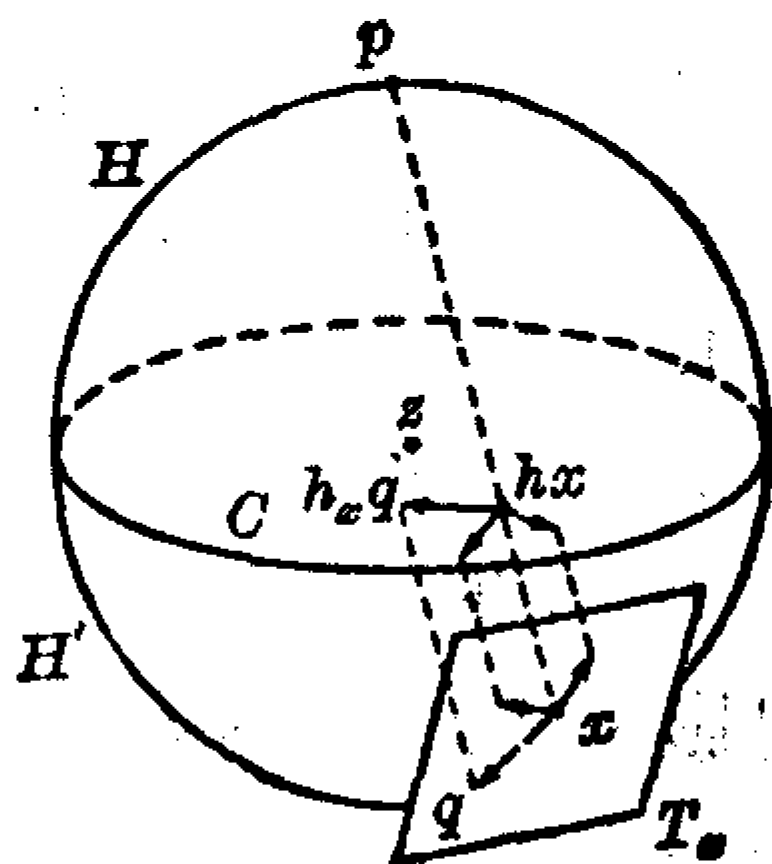


图 34.2

$P\cap S$, 又令 D 为 P 中以 C 为边界的圆片. 用 H 与 H' 表示 S 的、由 C 所决定的两个闭半球. 考虑过 z 并垂直于 P 的直线; 令它与 H 及 H' 的交点分别为极点 p 及 p'. 令 $h:H'\to D$ 为从 p 作球极射影所给定的拓扑等价. 明确地说, 如果 $x\in H'$, 则 hx 是 D 与从 p 到 x 这线段的交点. 类似地, 令 $h':H\to D$ 为从 p' 作球极射影所给定的拓扑等价.

只要能证明下述断言就够了: 如果 v 在两个半球之一上无零向量, 譬如说在 H' 上, 则在 H 上必有一个零向量. 作为第一个主要步骤,我们将证明:

1. 球极射影 h 把 H' 上的场 v 映入 D 上的场 w', 使得在对应点处的向量等长. 同样, h' 把 H 上的场 v 投射成 D 上的场 w.

一旦完成这证明, v 在 H' 上无零向量的事实将蕴涵 w' 在 D 上无零向量,因而由定理 31.1, 指标 $I(w', C)=0$. 然后,作为第二个主要步骤,我们将证明

2. 在 C 的一点 x 处, 向量 wx 与 $w'x$ 是把 vx 绕 C 的切线, 先按一个方式旋转 90° 而后按另一个方式旋转 90° 所得到的. 这一事实以及 $I(w', C)=0$ 就蕴涵 $I(w, C)=2$.

一旦证明了这个,应用定理 31.1 以及 $I(w, C)\neq 0$, 就可得到 w 在 D 的某点处有一零向量的结论; 从而 v 在 H 的对应点处有一零向量. 所以留待证明的是 1 与 2.

对于 S 的各点 x, 令 T_x 表示过 x 而与 S 相切的平面. 当 x 在 H' 中时, 用平行于过 p 与 x 的直线的一族平行线的平行射影来定义映射 $h_x:T_x\to P$. 明确地说, 对于 $q\in T_x$, 过 q 作一直线平行于过 p 与 x 的直线,则 $h_x(q)$ 是所作的直线与 P 的交点(看图 34.2). 证明从 p 到 x 的直线与 T_x 的夹角等于它与 P 的夹角,只是初等几何的一个习题. 所以 h_x 是等

距(保持距离)映射. 定义 D 中的场 w' 如下: $x \in H'$ 给出 D 中的 $hx=y$. P 中 y 处的向量 $w'y$ 定义为 T_x 中向量 vx 在 P 中的 h_x 象. 因为 h_x 是等距映射, 向量 $w'y$ 与 vx 等长. 同样, 对于 $x \in H$, 我们利用平行于过 p' 及 x 的直线来定义 $h'_x: T'_x \to P$, 并且在 $y=h'x$ 时, wy 是 vx 的 h'_x 象. 这就定义了 D 上的场 w 与 w', 并且完成了 1 的证明.

当 $x \in C$ 时, 有 $hx=x$ 与 $h'x=x$. 此外, 平面 T_x 与 P 都跟过 p 与 x 的直线作成 $45°$ 角. 故从 T_x 映到 P 的映射 h_x 可以看成是把 T_x 绕着 C 在 x 处的切线 L_x 旋转 $90°$ 的结果. 同样地, h'_x 是把 T_x 绕着 L_x 但在相反方向旋转 $90°$ 的结果. 所以作平面 P 关于 C 在 x 处的切线 L_x 的镜面反射, 向量 wx 就是 $w'x$ 的反射象.

如同第 30 节中所指出的, D 上的场 w' 可解释为一映射 $f: D \to P$. 因为 w' 无零向量, fD 不包含原点. 把 C 在 D 上缩到 D 的中心点的标准收缩 $\Phi: Q \to D$, 与 f 作复合映射 $f\Phi$, 就给出从闭曲线 $f|C$ 到单独一个点 (参看第 24 节与第 25 节) 的一个同伦. 把这同伦的对应于一个值 $\tau \in [0, 1]$ 的每一阶段重新解释为 C 上的一个向量场 w'_τ, 其中向量都在 P 中; 当 τ 从 0 变到 1 时, 我们得到 C 上的一个变动的向量场; 那就是, 对一固定的 $x \in C$, 当 τ 从 0 变到 1 时, 向量 $w'_\tau x$ 绕 x 旋转. 当 $\tau=0$ 时, w'_0 场是 w', 而当 $\tau=1$ 时, w'_1 是常向量场(全部向量平行并且等长). 因为 fD 不含有原点, 向量 $w'_\tau x$ 都不为零.

考虑平面 P 关于 L_x 的反射, 定义 $w_\tau x$ 是向量 $w'_\tau x$ 在这反射下的象. 于是, 对于各个 τ, w_τ 是 C 上的一个向量场, 其向量都在 P 中. 并且当 τ 从 0 变到 1 时, 我们得到从场 $w=w_0$ 到场 w_1 的一个同伦. 因为 $w_\tau x$ 永不为零, 从而 w 与

w_1在C上有同一指数．观察图34.3，就容易算出指数$I(w_1, C)$．C上常向量场w'_1用实线向量表示．场w_1用虚线向量表示．在C的各点x处，虚线向量w_1x是实线向量w'_1x关于切线L_x的反射象．在图34.3中，设我们从C的最高点开始，沿顺时针方向绕C跑一圈．开始$w_1x=w'_1x$指向右．在走过C的四分之一时，w_1x已逆时针方向转了180°，并指向左．当我们继续绕着C跑，它继续以同一速度旋转．当我们绕C跑完一圈，它就逆时针方向转了720°，所以$I(w_1, C)=2$．因$I(w, C)=I(w_1, C)$，从而$I(w, C)=2$．这就完成了定理的证明．

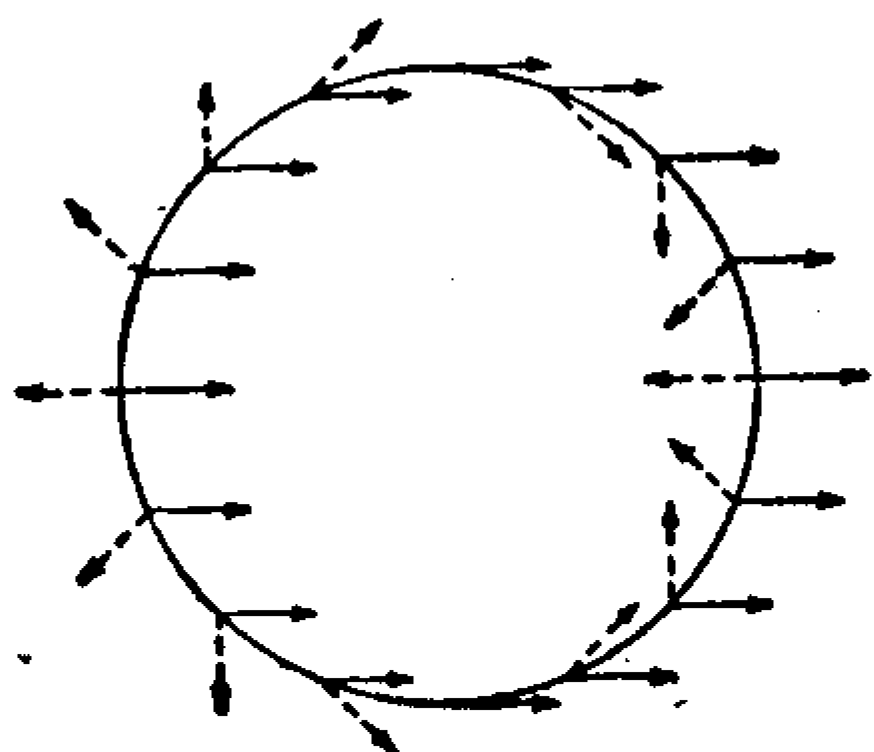


图 34.3

习　题

1. 试证：定义在球上的一个连续的非零向量场（但不要求向量切于球）至少有一个向量与球垂直．
2. 如果球用椭球（或任何光滑卵形球）替代，求证定理仍然成立．

35. 复　数

一个实变数x的某些多项式，例如x^4+x^2+1，没有实零点，这是大家都知道的．这种多项式中最简的是x^2+1，它使人们引进了纯虚数$\sqrt{-1}$，用i表示．然后发现其它多项式的零点都能表成$a+ib$这种形式，其中a与b是实数．例如，x^4+x^2+1的零点是

$$\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad -\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

这能用直接代入来验证.

我们应该把数系的这种扩大，跟第 5 节所讨论的各种扩大比较. 需要这种扩大的原因完全类似：求解多项式方程时，实数系已显得不够. 这就立刻产生两个问题：必须用多大的一类数才能使每个多项式有一个零点？怎样几何地描绘新的数？下一节中我们将要说明：复数集合就足够大了. 本节中我们将复习复数的基本性质与它们的几何解释.

正如实数能用直线上的点表示一样，复数能用平面 P 上的点表示. 一个复数 $x+iy$ 只不过是一对实数 (x, y). 在 P 中选定了原点、两垂直的坐标轴和长度单位后，实数对 (x, y) 能画成以 (x, y) 为坐标的点，如图 35.1 中所表明的. $y=0$ (即形式为 x 或 $(x, 0)$) 的复数叫实数. 它们是 x 轴上的点. $x=0$ (即 iy 形式的或 $(0, y)$) 的复数叫纯虚数. 它们是 y 轴上的点. 任何复数 $x+iy$ 在两坐标轴上的垂直射影是 x 与 iy. 实数 x, y 叫作 $x+iy$ 的实部与虚部.

为着使复数形成数系，必须定义复数的加法与乘法这两种运算. 两复数相加是把它们的实部与虚部分别相加.

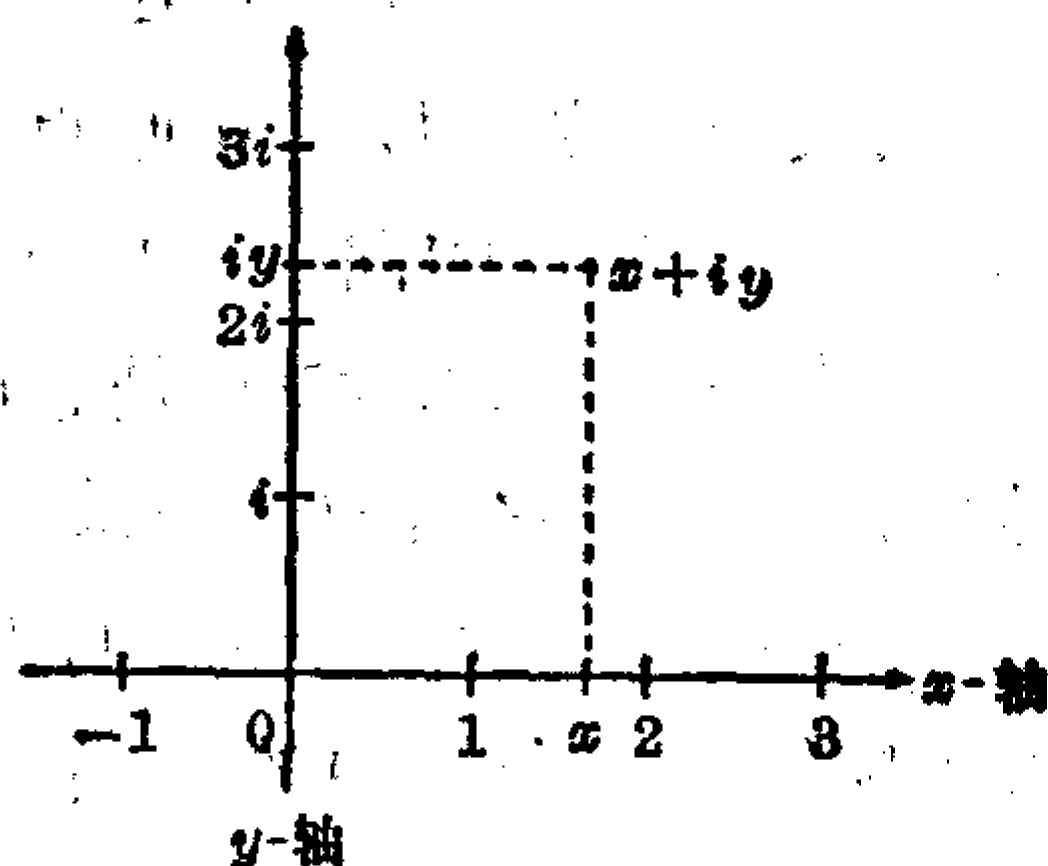


图 35.1

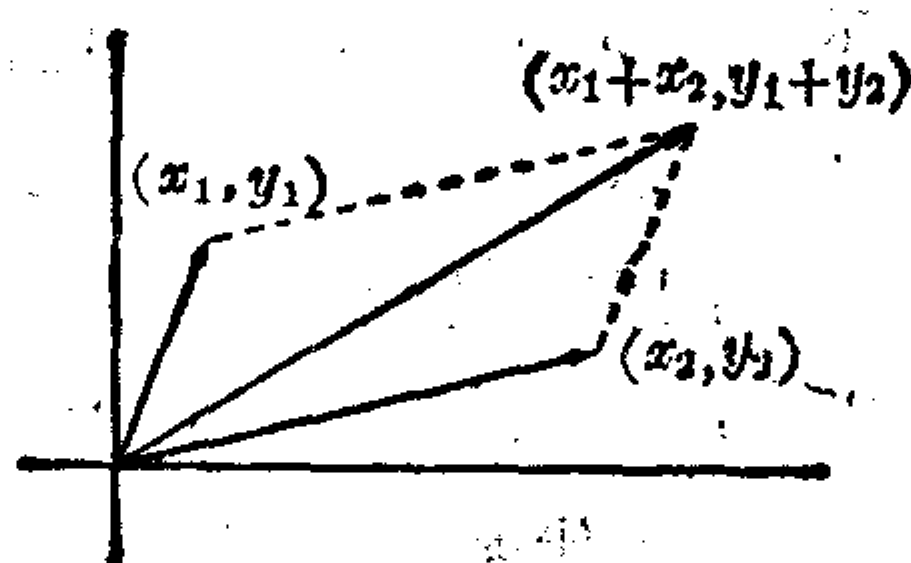


图 35.2

$$(x_1,\ y_1)+(x_2,\ y_2)=(x_1+x_2,\ y_1+y_2).$$

或，等价地，

$$(x_1+iy_1)+(x_2+iy_2)=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2).$$

加法的几何图形就是向量加法的几何图形，其中各复数 $(x,\ y)$ 表示为从原点到点 $(x,\ y)$ 的向量．两向量的和正好是以这两向量为邻边的平行四边形的对角线（见图 35.2）．

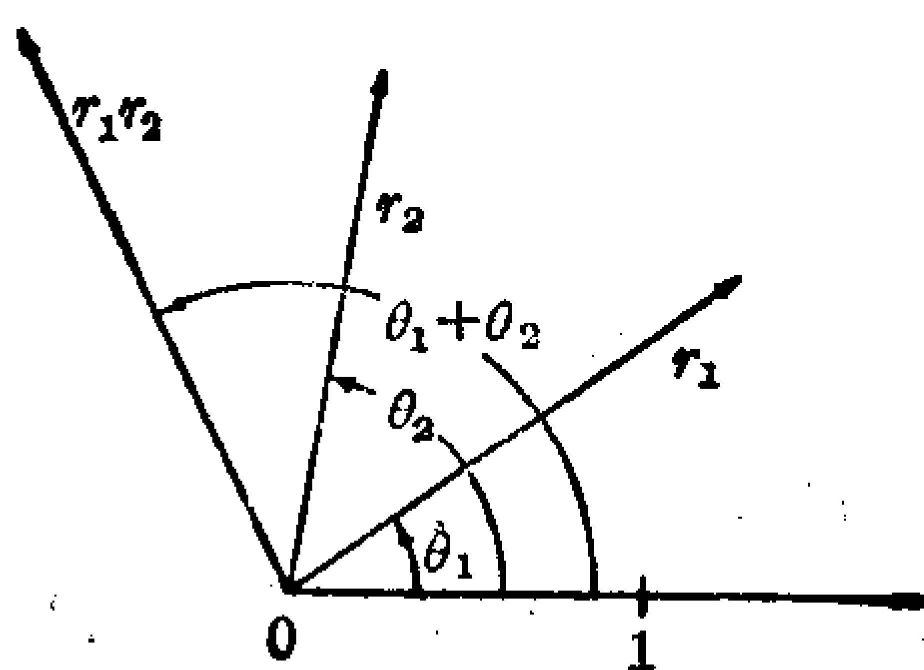


图 35.3

乘法比较复杂．用坐标来表示时，容易用下面的规律来得到乘积：

$$(x_1,\ y_1)\cdot(x_2,\ y_2)=(x_1x_2-y_1y_2,\ x_1y_2+x_2y_1).$$

例如
$$(2,\ -3)\cdot\left(-\frac{1}{2},\ 5\right)=\left(14,\ \frac{23}{2}\right).$$

假定了复数适合分配、结合与交换律，以及 $i^2=-1$ 这一个额外的规则，就能推导出乘法规则如下：

$$\begin{aligned}(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)&=x_1x_2+x_1iy_2+iy_1x_2+iy_1iy_2\\&=x_1x_2+i^2y_1y_2+ix_1y_2+ix_2y_1\\&=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1).\end{aligned}$$

乘法的几何图形根据于向量的夹角以及长度．在原点的角都从正 x 轴量起．于是任何以原点为起点的向量，由一对数 $[r,\ \theta]$ 决定．其中 θ 是它与 x 轴夹角的度数，$r\geqslant 0$ 是它的长．两向量（复数）相乘是把它们的角相加，它们的长相乘（见图 35.3）．例如，$i=[1,\ 90^\circ]$；因而 $i^2=[1,\ 180^\circ]=(-1,\ 0)=-1$．从代数规律推导出这几何规律是三角学中的一个习题．在代数规律中代入 $x_1=r_1\cos\theta_1$，$y_1=r_1\sin\theta_1$ 等等，然后应用正弦及余弦的加法公式．

还应做许多工作来说明这些定义合理. 第一, 对于沿 x 轴的数, 必须验证其加法与乘法同实数的一样. 这就表明复数形成实数的一种扩展. 其次应证明, 关于实数的一切代数规律对复数都成立, 例如加法与乘法的结合律、交换律以及分配律. 实数 $1=(1, 0)$ 是复数的单位, 就是 $(1, 0)\cdot(x, y)=(x, y)$. 原点 $(0, 0)$ 是加法与乘法两者中的零:

$$(0, 0)+(x, y)=(x, y), \quad (0, 0)\cdot(x, y)=(0, 0).$$

最后应该证明加法与乘法都是连续运算.

习惯上总把 (x, y) 缩写成 z, 于是 $z=x+iy$. 从而, $z^2=z\cdot z=(x^2-y^2, 2xy)$. 对所有的整数 $n\geqslant 1$, 用归纳法规律 $z^n=z\cdot z^{n-1}$ 来定义 z^n. 于是 $fz=z^n$ 定义从复数集合到自身的一个映射 $P\to P$. 如果 $n=1$, f 只不过是恒同映射. 如果 $n=2$, 则 f 是两倍从 x 轴量起的角以及平方从原点量起的距离. 从 0 出发的各射线映成两倍角的射线. 以 0 为中心、以 r 为半径的圆映射到以 0 为中心、以 r^2 为半径的圆上, 并绕它两次. 最好把 P 设想为从 0 出发的射线扇形. 于是 z^2 覆盖这扇形自身两层.

同样, $fz=z^n$ 把角乘以 n 并且把半径升到 n 次幂. 以 0 为中心、以 r 为半径的圆, 缠绕以 0 为中心、以 r^n 为半径的圆 n 层. 于是, 如果 C 是以 0 为中心的任一圆, 对于这函数 $fz=z^n$, 围绕数 $W(f|C, 0)$ 是 n.

n 次多项式 f 的定义正如同实数的一样. 它是由公式

$$fz=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_2z^2+a_1z+a_0$$

所给出的函数, 其中系数 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 都是指定的复数, 并且 $a_n\neq 0$. (要记住, 每个实数也是一个复数, 系数的全部或一部分可以是实数.) f 作为一个函数定义一映射 $f:P\to P$. 它的连续性可以利用复数的加法与乘法的连续性来证明.

习　　题

1. 几何地描述由下列公式给出的映射 $f: P \to P$:

(a) $fz = z - 4$;　　(b) $fz = z + 2i$;

(c) $fz = z + (1 - i)$;　　(d) $fz = 2z$;

(e) $fz = -z$;　　(f) $fz = iz$;

(g) $fz = (i+1)z$;　　(h) $fz = (i+1)z - 3i$;

(i) $fz = iz^2 + 2i + 2$;　　(j) $fz = 1/z \quad (z \neq 0)$.

36. 每一个多项式都有一个零点

定理 36.1　令 $n \geqslant 1$ 为一整数，又令 f 为以复数为系数的一个 n 次多项式。则 f 至少有一个零点，即至少有一个复数 α 使得 $f(\alpha) = 0$。

因 f 中 z^n 的系数不是零，故能用它去除各项而得 $f/a = g$ 或 $f = ag$，其中 g 的首项系数为 1:

$$g(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n.$$

因为 g 的一个零点也是 f 的一个零点，只需证明 g 有一个零点。为着这一目的，考虑映射 $g: P \to P$，并将说明有一个圆 C，它的 g 象绕零点 n 次：$W(g|C, 0) = n$。既然 $n \neq 0$，第二编的主要定理断言 C 内部有一点 α 使得 $g\alpha = 0$。

从 0 到一个复数 z 的距离 $d(z, 0)$ 叫作该复数 z 的绝对值，简写为 $|z|$。我们所求的圆 C 将以 0 为中心，而它的半径 r 将是较实数

$$n|a_1|, \quad (n|a_2|)^{1/2}, \quad \cdots, \quad (n|a_n|)^{1/n}$$

的最大值 r_0 更大的任一数。$W(g|C, 0)$ 的直接计算太困难，

所以我们要建立一个从 $g|C$ 到由多项式 z^n 所给定的较简单映射的同伦．在第 35 节中，我们已见到 $W(z^n|C,\ 0)=n$．所以如果我们能指出 0 不在这同伦的象中，则围绕数的常值性蕴含 $W(g|C,\ 0)=n$．

令 $$h(z)=\frac{a_1}{z}+\frac{a_2}{z^2}+\cdots+\frac{a_n}{z^n},$$

并且用公式

$$g(z,\ \tau)=z^n[1+(1-\tau)h(z)],\ z\in C,\ 0\leqslant\tau\leqslant1,$$

来定义 $g|C$ 的同伦．当 $\tau=1$ 时，$g(z,\ \tau)$ 化简为 z^n；而当 $\tau=0$ 时，$g(z,\ 0)=gz$．还待证明：0 不在这个同伦的象中，即，对于全体 $z\in C$ 与全体 $\tau\in[0,\ 1]$，$g(z,\ \tau)\neq0$．

现在 $z\in C$ 的意思是 $|z|=r$．因 $r>(n|a_k|)^{1/k}$，$k=1,\ \cdots,\ n$，从而 $r^k>n|a_k|$，而这蕴含着对于全体 $z\in C$，

$$\frac{|a_k|}{|z^k|}=\frac{|a_k|}{r^k}<\frac{1}{n}.$$

因为在 C 上，$h(z)$ 有 n 项，各项的绝对值小于 $1/n$，从而在 C 上，$|h(z)|<1$．又因为 $|1-\tau|\leqslant1$，求得 $|(1-\tau)h(z)|<1$．1 与绝对值比 1 小的复数之和永不为零．所以对于全体 $z\in C$ 与 $\tau\in[0,\ 1]$，$1+(1-\tau)h(z)$ 不为零．因为当 $z\in C$ 时，z^n 也不为零，从而乘积 $z^n[1+(1-\tau)h(z)]=g(z,\ \tau)$ 不是零．证明完成．

高于 1 次的多项式仅有一个零点，代数学家对此是不会满意的．下述定理给出完整的结果．

定理 36.2 令 f 为 n 次(实或)复系数多项式．则有 n 个复数 $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_n$，使得 f 分解成 n 个线性因式的乘积

$$f(z)=a_n(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\cdots(z-\alpha_n).$$

如果命 $z=\alpha_i$，第 i 个因子是零；因而每一个 α_i 是 f 的一个零点．如果命 $z=\alpha$，该 α 是不同于 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 的数，则每个因子都不是零；从而 $f(\alpha)\neq 0$．这证明了 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 都是 f 的零点，并且它们是仅有的零点．如果一个特别的数在序列中出现两次或更多次，该数就叫作 f 的一个**重零点**，出现的次数叫作它的**重数**．

定理的证明需要下述引理．

引理　如果 f 是一个 n 次多项式，α 是任一复数，则有一个 $n-1$ 次多项式 g 使得 $f(z)=(z-\alpha)g(z)+f(\alpha)$．

我们用长除法求 $f/(z-\alpha)$，来证本引理．令 g 表示商，r 表示余项，有

$$\frac{f(z)}{z-\alpha}=g(z)+\frac{r}{z-\alpha}.$$

乘以 $z-\alpha$，得　$f(z)=(z-\alpha)g(z)+r$．

为了计算 r，命 $z=\alpha$，从而得 $f(\alpha)=r$．

现在应用定理 36.1 来证明定理 36.2，前一定理说 f 至少有一个零点，设为 α_1．因为 $f(\alpha_1)=0$，引理断言有一个 $n-1$ 次的多项式 g，使得

$$f(z)=(z-\alpha_1)g(z)+f(\alpha_1)=(z-\alpha_1)g(z).$$

因为 $f(\alpha_1)=0$，所以余项消失了．如果 $n-1\geqslant 1$，我们可以应用定理 36.1 而获得 g 的一个零点 α_2．于是引理说，有一个 $n-2$ 次的多项式 h，使得

$$g(z)=(z-\alpha_2)h(z).$$

综合这些结果，就给出

$$f(z)=(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)h(z).$$

若 $n\geqslant 3$, h 就有一个零点 α_3, 并且 $h(z)=(z-\alpha_3)k(z)$; 从而

$$f(z)=(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)(z-\alpha_3)k(z).$$

每一步把最末尾因式的次数降低1. 在 n 步之后, 末尾因式的次数为零,因而它是常数 c, 并且

$$f(z)=(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\cdots(z-\alpha_n)c.$$

如果把右端乘出来, z^n 的系数是 c. 所以 $c=a_n$. 证明完成.

历史注释. 定理 36.1 叫做代数的基本定理. Gauss在1797年首先给出它的严格证明(见 D. E. Smith, A Source Book of Mathematics, Dover, 1959, 292页). 在以后的年代中,他给出了几个很不相同的证明,但没有一个象上面所陈述的. 一个沿经典路线的但直接并且相当简单的证明,见 Ford 与 Ford: Calculus(McGraw-Hill, 1963)这本书中第263页.

习　题

1. 如果 r_0 如同定理 36.1 的证明中所定义, E 表示集合 $|z|>r_0$, 试证 f 在 E 中无零点.
2. 算出下列各多项式的数 r_0, 于是求出绕原点而包含多项式全部零点的圆片.

   (a) z^4+3z^3-2z+5;　　(b) $2z^7+iz^3-3z$;

   (c) $z^4+(2-i)z^3+(i+1)z$.
3. 令 $fz=(z-2)(z+1)(z-i)4$; 算出多项式的各系数, 算出 r_0 如上,并验证以 r_0 为半径的圆片包含全部零点.
4. 求出下列各二次多项式的零点, 并验证: 全部零点在以 r_0 为半径的圆片内.

   (a) $3z^2-13z-10$;　　(b) $3z^2-2z+1$.
5. 在定理的证明中,说明:只要挑选出 r 来,使和

$$\frac{|a_1|}{r}+\frac{|a_2|}{r^2}+\cdots+\frac{|a_n|}{r^n}<1$$

就够了.

6. 利用这事实，证明 z^3-z+5 的全部零点都在圆 $|z|=2$ 的内部.

37. 结束语：高维情形的一瞥

从一维情形过渡到二维情形时，我们遇到了严重的困难；只能凭借发展一个新概念——闭曲线 φ 在一点 y 处的围绕数 $W(\varphi, y)$，才解决了这困难. 可以预期在过渡到三维以及更高维情形时，会出现另外的困难. 困难确实出现了，不过在二维时已见效的很多想法略加改变都可以推广到高维. 关于这类问题已有很多成果，简短地、粗线条地介绍其中的一部分是值得的. 因为这一部分体现了现代数学研究的一些最好的成果.

在从平面 P 过渡到 n 维欧氏空间 R^n 时，自然要把圆片与其边界圆代之以 n 维球体 B 与其边界 $n-1$ 维球 S. 令 $f:B\to R^n$ 为一映射，而 y 是 R^n 的不在 fS 上的一点. 主要定理说：若 $W(f|S, y)\neq 0$，则至少有一个点 $x\in B$ 使得 $fx=y$. 首要问题在于定义 $W(f|S, y)$ 这个数，使得它具有 $n=2$ 时围绕数的所有性质. 当 $n=3$ 时，最好称 $W(f|S, y)$ 为包裹数. 例如，球 S 应该包围 B 的各内点正好一次. 这项工作已完成：对所有维数 n，已精确地定义了数 $W(f|S, y)$，并且已证明它具有 $n=2$ 时的同样性质. 例如，在不通过 y 的任一同伦下，它是不变的.

一旦主要定理已经证明，则在 27—36 节中所讨论的 $n=2$ 时的应用，仅需稍许改变符号与说法，就能对所有的维数都可陈述并且证明. 现在让我们陈述其中的几个. 因为球 S 包围球 B 各内点一次，保持 S 的全体点不动的任一映射 $f:B\to$

R^n，具有性质 $fB \supset B$. 其次，任一映射 $B \to B$ 至少有一个不动点. 再者，如果 R^n 中的一球 S 映到 R^{n-1}，则某些对对径点有同一象点.

有关 R^n 中球 S 的切向量场的定理必须加以修改. 当 n 是偶数时，S 具有一连续的非零切向量场(例如，在 $n=2$ 时 S 是一圆). 当 n 是奇数时，S 的任一连续的切向量场至少有一个零.

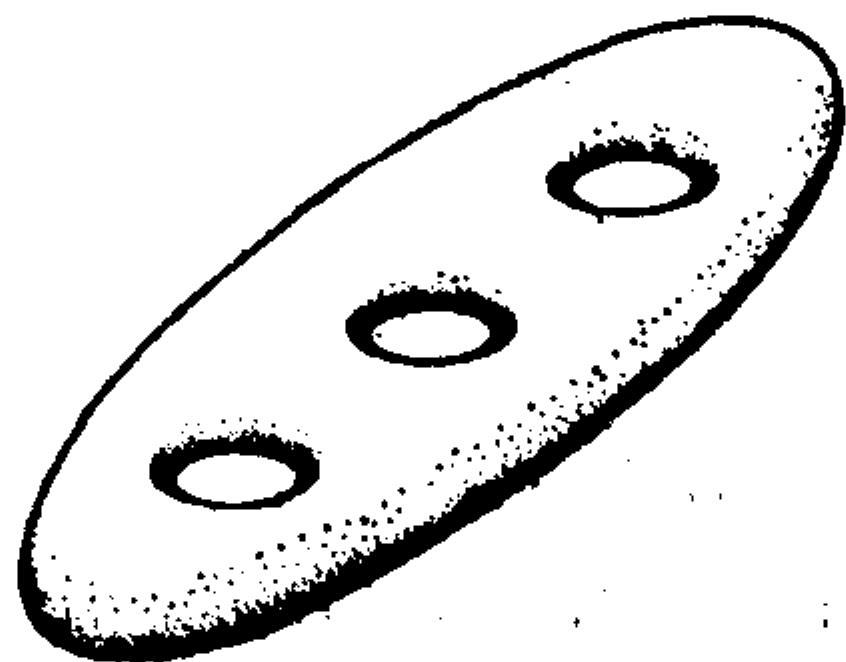


图 37.1

在跳到 n 维情形时，有两个问题我们略去未提，但值得给予更多注意. 其中第一个是：在主要定理中的球体与球面能否用其他图形替代，而不改变其结论的精确性？自然，人们总能用拓扑等价的图形替代，诸如实心盒子以及它的边界面. 但用拓扑相异图形替代时，主要定理的结论能否不引起本质的改变？在维数大于 2 时答案是"肯定的". 例如，在 R^3 中令 T 为一环面而 D 为它的内部(例如，D 是一实心环而 T 是它的边界面). 人们能定义一个包裹数 $W(f|T, y)$ 使得 T 包裹 D 的各内点一次，而包裹 D 的补集的各内点零次. 在 R^3 中多连通曲面以及它们的实心内部，提供了 R^3 中另外的例子. 图 37.1 表示有三个洞的油炸甜饼以及它的边界.

第二个我们曾经略去未提的问题是：为什么我们只考虑 n 维集合映到 n 维集合的映射？我们的主要定理能否推广到容许 k 维集合映到 R^n 的映射？我们将简略地说明，在 $k=2$ 与 $n=3$ 时，如何能在这方面获得一些成果. 令 $f: D \to R^3$ 为圆片映到空间的映射. 令 $\varphi: [a, b] \to R^3$ 为 R^3 中不与 fC 相交的闭曲线. 对于给定的 $f|C$ 与 φ 这两条曲线，规定一个整

数$W(f|C, \varphi)$，叫做它们的环绕数．图 37.2 中的五个例子，按照从左到右的顺序有环绕数 0, 1, 2, 4 与 0．主要定理的新陈述如下：如果环绕数 $W(f|C, \varphi)$不是零，则 fD 与闭曲线 φ 至少相交于一点．读者应把它与图 37.2 中的五个例子相核对，在第一与第五例中，人们能画出一个曲面，它以下面的闭曲线为边界而不与上面的闭曲线相交．这个曲面会是 fD．在其他三例中，无论我们如何安装上一个以下面的曲线为边界的曲面 fD，这个曲面总与上面的曲线相交．（在例 3 及 4 中，人们能画出一个扭弯的带子，即一麦比乌斯带，它不与上面的曲线相遇，而它的周界是下面的曲线；但是它不能是一个 fD，因为它是单侧的.）

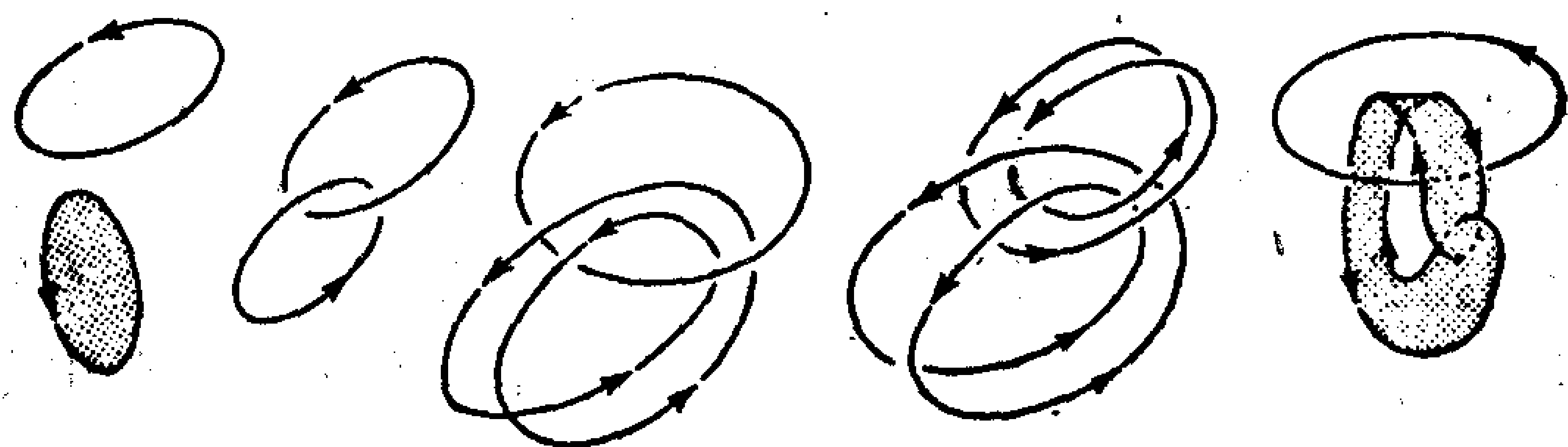


图 37.2

注意：在平面中围绕数 $W(f|C, y)$ 涉及到一条闭曲线与一个点，而过渡到把一个圆片映到 R^3 时，替代 y 这个点的是一条闭曲线 φ，围绕数变成环绕数．如果对于把圆片映到 R^4 的映射，我们要陈述一个类似主要定理的定理，就会需要 R^4 中的一条闭曲线 $f|C$ 与一个闭曲面 φ 的“环绕数” $W(f|C, \varphi)$的概念．R^4 中的一个闭曲面是一个球面，或一个环面，或多连通闭曲面的任一种映到 R^4 的一个连续映射象．

拓扑学中对于任意维数 n，定义了一个概念叫作圈．一个点，一条闭曲线以及一个闭曲面分别是 0 维，1 维及 2 维的

圈. 以圈为边界的图形(例如区间, 圆片, 球体等等)都叫做链. 圈, 链, 它们的同调与同伦, 以及它们的交与环绕, 形成同调理论的一系列引人入胜题材的主要精华, 而同调理论是拓扑学的一个主要部分.

我们已阐明了如何运用拓扑学的一些简单观念来证明定理, 这些定理既直觉地使人满意, 同时又意义深刻. 它们是存在定理. 这些定理的高维推广, 人们能用同调理论的概念来阐述并且加以证明.

如果读者愿意进一步探讨本书所提供观念的发展, 可参考下列书籍. Hall 与 Spencer 的书提供了在点集拓扑方面的第一编材料的继续. 另两本书继续第二编的代数拓扑观念.

D. W. Hall 与 G. L. Spencer, *Elementary Topology*, John Wiley and Sons, 纽约, 1955.

J. G. Hocking 与 G. S. Young, *Topology*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1961.

P. J. Hilton 与 S. Wylie, *Homology Theory*, Cambridge University Press, 1960. [此书前半, 有中文译本. 希尔顿与瓦利, 同调论, 上海科学技术出版社, 1963.]

习题解答

第一节

1. 极小值 $f(3)=1$, 极大值 $f(1)=5$, 因为 $f(x)=5-(x-1)^2$. 若 $y<1$ 或 $y>5$, 则 $y=f(x)$ 无解; 若 $1\leqslant y<4$ 或 $y=5$, 只有一个解. 若 $4\leqslant y<5$, 有两个解.
2. 因为 x^3-5 当 x 从 1 变到 2 时, 可取 -4 和 3 之间的所有值, 所以对于 1 和 2 之间的某个 x 值, 它取值 0. 因为 $x^3-5=0$ 指的是 $x^3=5$, 所以解 x 必须是 $\sqrt[3]{5}$.
3. 这个函数的值在 $x=3$ 处是负的, 在 $x=4$ 处是正的, 所以它在 3 和 4 之间有一个 0 点. [函数 $f(x)$ 的一个零点即方程 $f(x)=0$ 的一个解.]
4. 最小值 $f(5)=\frac{1}{5}$. 这里没有极大值, 因为, 对于 $n=1, 2, 3, \cdots$, $f\left(\frac{1}{n}\right)$ 的值是 $f\left(\frac{1}{n}\right)=n$. 注意 $f(0)$ 没有定义.
5. 在这种情形下, f 的每一个值都是 3($f(x)=3$ 的图象为一水平线段), 所以 $m=M=3$.
6. 最小值 $f(0)=0$. 这里没有最大值, 因为 5 不在区间 $[0, 5)$ 中.

第二节

1. 为着证明两个集相等, 必须证明第一个集的元素是第二个集的元素, 反之也是一样. 第一步, 假设 $x\in(A\cup B)\cap C$. 这是说 x 在 A 或 B 中, 且同时在 C 中. 所以必须考虑下述两种情形.

   情形1: $x\in A$ 和 $x\in C$. 因而 $x\in A\cap C$, 这蕴涵

   $$x\in(A\cap C)\cup(B\cap C).$$

   情形2: $x\in B$ 和 $x\in C$. 因而 $x\in B\cap C$, 这蕴涵

   $$x\in(A\cap C)\cup(B\cap C).$$

   第二步, 假设 $x\in(A\cap C)\cup(B\cap C)$. 这蕴涵

$$x\in A\cap C \quad 或 \quad x\in B\cap C.$$

情形1: $x\in A\cap C$. 因而$x\in A$和$x\in C$. 这蕴涵

$$x\in (A\cup B) \quad 和 \quad x\in C;$$

所以$x\in (A\cup B)\cap C$.

情形2: $x\in B\cap C$. 因而$x\in B$和$x\in C$. 这蕴涵

$$x\in (A\cup B) \quad 和 \quad x\in C.$$

在任一种情形下, $x\in (A\cup B)\cap C$(见图S1).

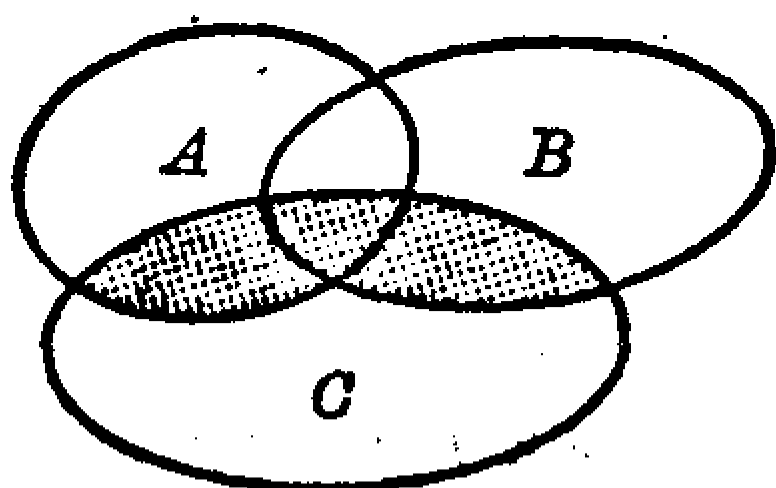


图 S1

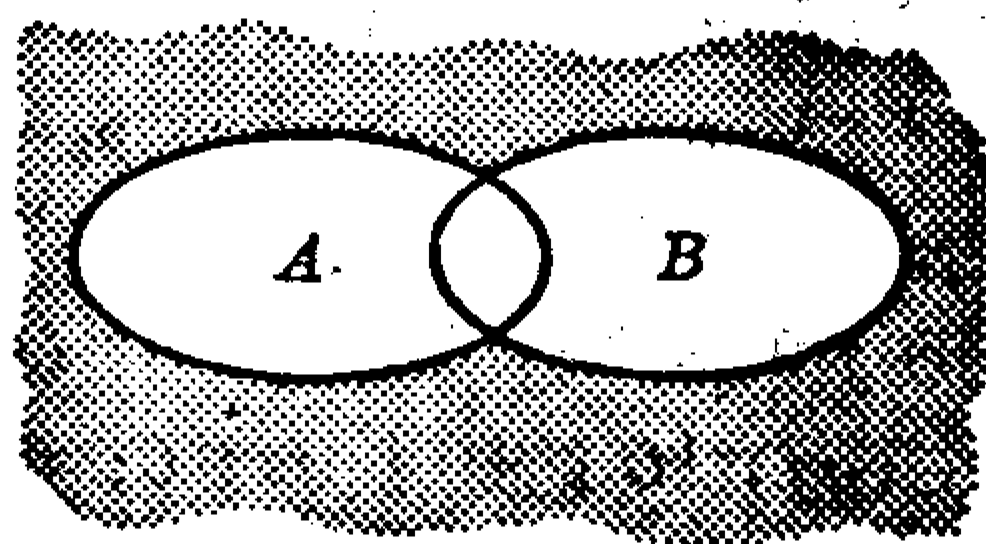


图 S2

2. 见图S2.
3. 因为B和其补集没有公共点, B的任何子集和B的补集也没有公共点.
4. (a) 按照习题1的解答中所说的格式, 令$y\in f(A\cup B)$. 这是说存在$x\in A\cup B$, 使$fx=y$. 在$x\in A$的情形下, 有$y\in fA$; 在$x\in B$的情形下, 有$y\in fB$. 于是, 在任一种情况下, $y\in fA\cup fB$. 反之, 令$y\in fA\cup fB$. 在$y\in fA$的情形下, 则有一个$x\in A$, 使得$fx=y$; 且因为$x\in A\cup B$, 这就是说$y\in f(A\cup B)$. 在$y\in fB$情形下, $y=fx$, 对于某$x\in B$; 且因为$x\in A\cup B$, 这就是说$y\in f(A\cup B)$. 所以, 在任一种情形下, $y\in f(A\cup B)$.

   (b) 令$y\in f(A\cap B)$, 则对一些$x\in A\cap B$有$y=fx$. 因为$x\in A$, 有$y\in fA$; 且因为$x\in B$, 有$y\in fB$. 所以$y\in fA\cap fB$. (反之不能成立. 设X由A和B两点组成, Y只有一个点y; 则$fA=y=fB$, $f(A\cap B)=\emptyset$, 而$fA\cap fB$由y组成).
5. (a) 以S为圆心的圆.

   (b) 通过S的直线.

(c) 圆(通过 N 与这线段的平面交 X 成一圆)的一段弧。

(d) 大两倍.

(e) 从 N 到 S 的半个大圆的所有点,但除去点 N。

6. gf: $y_1=-x_1-3,\quad y_2=x_2-4$

fg: $y_1=-x_1+3,\quad y_2=x_2-4$

f^{-1}: $y_1=x_1-3,\quad y_2=x_2+4$

g^{-1}: $y_1=-x_1,\quad y_2=x_2$

$(gf)^{-1}$: $y_1=-x_1-3,\quad y_2=x_2+4$

$f^{-1}g^{-1}$: $y_1=-x_1-3,\quad y_2=x_2+4$

$g^{-1}f^{-1}$: $y_1=-x_1+3,\quad y_2=x_2+4$

否; $g^{-1}f^{-1}\neq(gf)^{-1}$.

7. (b) $f^{-1}Y=X; f^{-1}\emptyset=\emptyset$. (c) $f^{-1}A\subset f^{-1}B$.

8. $x\in(gf)^{-1}C$ 就是说 $gfx\in C$; 并且这就是说 $fx\in g^{-1}C$, 这又就是说 $x\in f^{-1}(g^{-1}C)$; 所以 $x\in(gf)^{-1}C$ 就是说 $x\in f^{-1}(g^{-1}C)$. (我们用"就是说"这个词时,意思指这个词的前后两个命题等价,即每一命题蕴涵另一命题.)第二步, 设 $x\neq x'$. 因为 f 是一对一, 有 $fx\neq fx'$, 并且因为 g 是一对一,有 $gfx\neq gfx'$. 现在令 $z\in Z$. 因为 $gY=Z$, 存在 $y\in Y$ 使 $gy=z$; 并且因为 $fX=Y$, 存在 $x\in X$ 使 $fx=y$; 所以 $gfx=z$ 或 $x=(gf)^{-1}z$. 由定义 $y=g^{-1}z$ 与 $x=f^{-1}y$; 所以 $x=f^{-1}g^{-1}x$. 即 $(gf)^{-1}=f^{-1}g^{-1}$.

第 三 节

1. 当 x, y, z 是在一直线上且 y 在 x 和 z 之间。

2. $r'=r-d(x, x')$.

3. 因为 $N(fx, \epsilon)\supset N\left(fx, \frac{1}{2}\right)$ 对于所有的 $\epsilon\geqslant\frac{1}{2}$.

4. 因为 $N(x, \delta')\subset N(x, \delta)$ 对于所有的 $\delta'<\delta$.

5. 在 C 的每一点处不连续, 其他处都连续. 对于 $\epsilon\leqslant\sqrt{2}$, 找不到相应的 δ.

6. 因为任何距离都不增大:

$$d(x, x')\geqslant d(fx, fx')$$

对于所有的 x, x'.

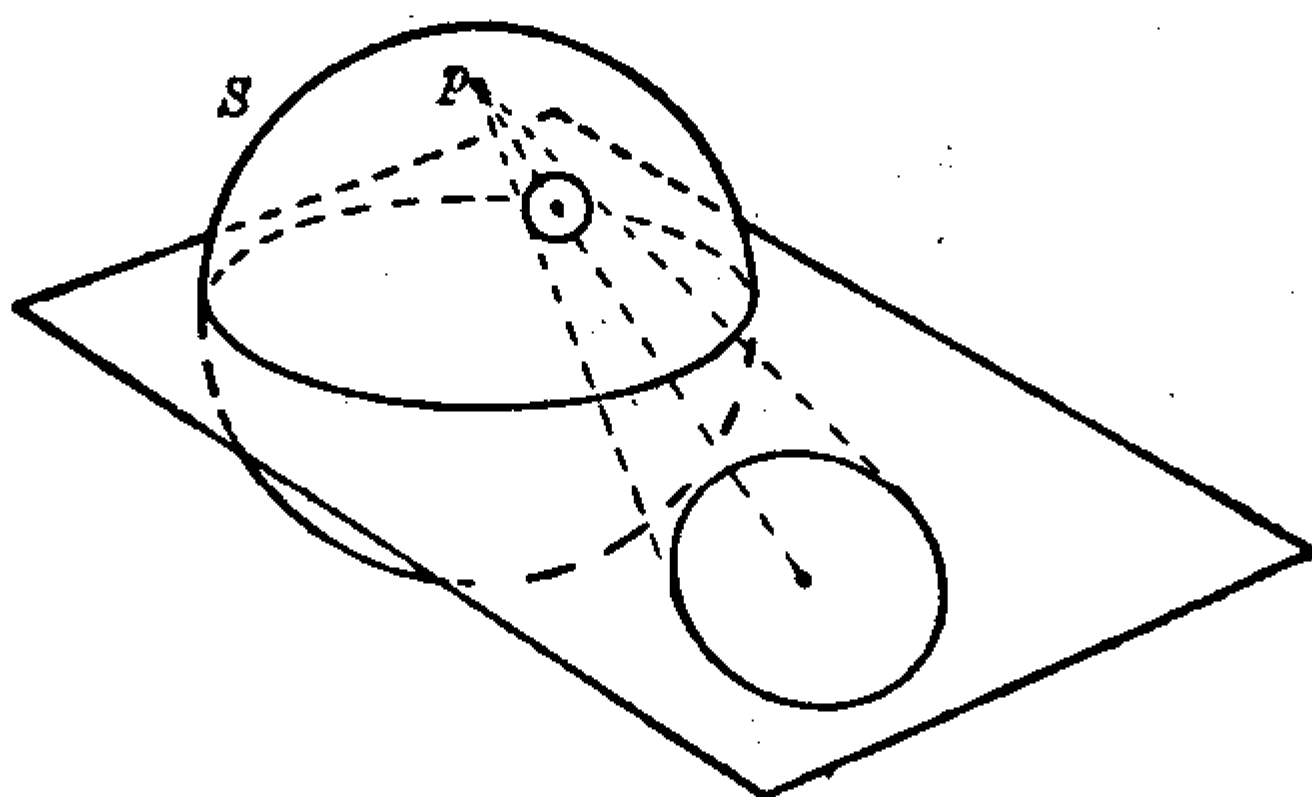


图 S3

7. 下半球的任何一对点间的距离缩短. f^{-1} 把点 $y\in R^2$ 映成射线 py 与 S 的交点. 见图 S3. 可从这同一个图看出, f^{-1} 也是连续的. $N(p, r, s)-p$ 的 f 象是以原点为中心的一个圆的外部. 如果 fp 有定义,并且 f 在 p 处连续的话,则任何 $N(fp, \epsilon)$将会包含某一圆的整个外部;而这是不可能的.
8. 令 $x\in[a, b]$与 $\epsilon>0$ 固定. 因为 f 在 x 处连续,就有一个 $\delta_1>0$,对于所有的 $x'\in N(x, \delta_1)$有$|fx'-fx|<\epsilon/2$. 因为 g 连续, 就有一个 $\delta_2>0$, 对于所有的 $x'\in N(x, \delta_2)$使 $|gx'-gx|<\epsilon/2$. 取 δ 为 δ_1 与 δ_2 中较小的一个. 则 $x'\in N(x, \delta)$就是说
$$|fx'-fx|+|gx'-gx|<\epsilon/2+\epsilon/2=\epsilon.$$
现在应用提示中的不等式.
9. $\delta=d\sin 2\theta=2d\sin\theta\cos\theta$, 其中 $\sin\theta=\epsilon/2$, 因为
$$\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta},$$
直接代入给出, $\delta=d\epsilon\sqrt{1-\epsilon^2/4}$.

第 四 节

1. 对于任意空间 X, 一个单独的点 $x\in X$ 是 X 的一个闭集. 因为有限个闭集的并集是闭集,所以空间 X 中的任意有限集合 A, 作为有限个单独的点的并集, 必然是闭集. 如果 X 也是有限的, 那么 $X-A$ 是有限的; 所以 $X-A$ 是闭集,因此 A 是开集.
2. 一个答案是 $V=U\cup(R^2-L)$.
3. $x^2+y^2<1$.

4. 单独的一个点所形成的集合；也是 R^2 自身。

5. 设 X 是由两个点 x_1, x_2 组成的集合，并且 $A=\{x_1\}$, $B=\{x_2\}$, A 与 B 互为补集，$A\cup B=X$. $X-(A\cup B)=\emptyset$;

$$(X-A)\cup(X-B)=B\cup A=X.$$

6. 设 $X=R$, $A=(0, 2]$, $B=[1, 3)$; 那么 $A\cup B$ 是 R 中的开集.

7. 若 U 是 X 的开集，则由定理 4.4 存在 R^n 的一个开集 W, 使得 $U=X\cap W$. 令 $V=Y\cap W$. 于是 V 是 Y 的开集，并且 $U=X\cap V$, 因为 $X\cap Y=X$.

8. 这些区间的交集是单独的一个点 0, R 的单独的一个点永远不会是 R 的一个开集.

9. 令 $X=\{x_1\}$, $Y=\{y_1, y_2\}$ 使得 $fx_1=y_1$. $A=\emptyset\subset X$, $fA=\emptyset$, $Y-fA=Y$. $f(X-A)=fX=y_1$. 因此 $Y-fA\neq f(X-A)$.

10. $x\in X-f^{-1}A$ 就是说 $x\in X$ 和 $x\notin f^{-1}A$. $x\in X$ 就是说 $fx\in Y$, 并且 $x\notin f^{-1}A$ 就是说 $fx\notin A$. 因而 $fx\in Y-A$, 并且这就是说 $x\in f^{-1}(Y-A)$.

11. 设 A 是 X 的一个子集，并且是 X 中的开集，那么对于每一个点 $x\in A$, 存在 x 的在 X 中的某邻域，并且 A 包含这邻域. 每个邻域都是开集，取所有这样的邻域的并集.

第 五 节

1. 若 $\sqrt{3}$ 是有理数，我们就能写 $\sqrt{3}=a/b$, 其中 a, b 是没有公共因子的整数. 上式两边平方，并乘以 b^2, 得到 $a^2=3b^2$. 这说明 a^2 是可以被 3 除尽. 若 a 不能被 3 除尽，它将是下面两种形式之一: $a=3k+1$ 或 $a=3k+2$, 其中 k 是某整数. 在第一种情形下

$$a^2=9k^2+6k+1=3(3k^2+2k)+1=3k'+1;$$

在第二种情形下

$$a^2=9k^2+12k+4=3k''+1;$$

所以在任一种情形下，a^2 都不能被 3 除尽. 但 $a^2=3b^2$ 是可以被 3 除尽，所以 a 必然可以被 3 除尽，即有某整数 k, 使 $a=3k$. 然后 $3b^2=(3k)^2=9k^2$, 因而 $b^2=3k^2$; 这就是说 b^2 可以被 3 除尽，由

此可得到 b 可以被 3 除尽．这是矛盾，因为前面假设 a、b 没有公共因子．

2．令 $2n^2=m^2$；因为 n 是一个整数，其质因子分解中因子 2 出现的个数或者是奇数，或者是偶数．在任何一种情形下，n^2 都有偶数个因子 2，而 $2n^2$ 有奇数个因子 2．但是 m^2 有偶数个因子 2；所以，如果 m 和 n 都是整数，$2n^2\neq m^2$；这就是说，$2n^2=m^2$ 没有当 m，n 都是整数的解．

3．取 $2n^3=m^3$；若在 m 的质因子分解中因子 2 出现 k 次，则在 m^3 中它出现 $3k$ 次．若在 n 的质因子分解中因子 2 出现 k' 次，则在 n^3 中它出现 $3k'$ 次，而在 $2n^3$ 中出现 $3k'+1$ 次．因为质因子分解的唯一性，$2n^3=m^3$ 有整数解只当整数 k，k' 满足 $3k'+1=3k$．这是不可能的，因为 $3k'+1$ 不能被 3 除尽，而 $3k$ 可以被 3 除尽．

4．如果有有理数解 $x=m/n$ 和 $y=p/q$，其中 m，n，p，q 是整数，则

$$\frac{p^2}{q^2}=\frac{2m^2}{n^2},\quad 则\quad (np)^2=2(mq)^2,\ 及\quad \sqrt{2}=+\frac{np}{mq}.$$

这就是说 $\sqrt{2}$ 是有理数，这和第五节中所证明的结论相矛盾．

5．如有整数 k，m，n 使得

$$\left(\frac{k+m\sqrt{2}}{n}\right)^3=2\quad 并且\quad m\neq 0,$$

则展开可得 $k^3+3k^2m\sqrt{2}+3km^2 2+2m^3\sqrt{2}=2n^3$，由此可得

$$\sqrt{2}=\frac{2n^3-k^3-6km^2}{3k^2m+2m^3}$$

是一有理数；这是矛盾的．$m=0$ 的情形就是习题 3．

6．这个级数的部分和是

$$0,\ 1,\ .9,\ .91,\ .909,\ .9091,\ .90909,\ \cdots$$

并且从一个部分和到下一个的区间形成区间的一个收缩序列

$$[0,\ 1]\supset[.9,\ 1]\supset[.9,\ .91]\supset[.909,\ .91]\supset\cdots.$$

这是正则收缩序列．它们的交是一个小数展开为 0.909090… 的数(以 90 为循环节)．它等于 10/11，代表无穷级数的和．

7．与习题 6 类似：

$[0, 1]\supset\left[\frac{1}{2}, 1\right]\supset\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]\supset\left[\frac{5}{8}, \frac{3}{4}\right]\supset\cdots$；和是 $\frac{2}{3}$.

8. 第一次试算得出 12.27 至少是 3.41 的 3 倍，但不到 4 倍，所以第一个区间是[3, 4]. 第二次试算得出 12.27 至少是 3.41 的 3.5 倍，不到 3.6 倍，所以第二个区间是[3.5, 3.6]. 下一个是[3.59, 3.60]，然后是[3.598, 3.599]，….

9. $[1, 2]\supset[1.5, 1.6]\supset[1.58, 1.59]\supset\cdots$.

10. 如果 s 是小于 $b-a$ 的正数，则所有 s 的整数倍在直线上均匀分布，并且每两个相邻的倍数之间的距离为 s. 因为 a 与 b 之间的距离比 s 大，区间 (a, b) 必含有 s 的某个倍数。为着在 (a, b) 中构造一有理数，取 $s=1/n$，其中 n 是一整数使 $n>\frac{1}{(b-a)}$. 因而 $s=1/n<b-a$，并且某个倍数 $ms=m/n$ 是在 (a, b) 中的一有理数. 为着在 (a, b) 中得到一个无理数，令 $s=\sqrt{2}/n<b-a$. Q 不是闭的，因为，对于每个 $x\in R-Q$ 与每个 $r>0$，区间 $N(x, r)$ 包含有理数。Q 也不是开的，因为每个开区间包含无理数.

11. 因为 $a<b$，对于每个 $a\in A$ 与 $b\in B$，取任意的 $I_0=[a_0, b_0]$，其中 $a_0\in A$，$b_0\in B$. 令 $c_0=\frac{1}{2}(a_0+b_0)$. 则 $a_0<c_0<b_0$. 或者 $c_0\in A$ 或者 $c_0\in B$. 如果 $c_0\in A$，令 $I_1=[a_1, b_1]$，其中 $a_1=c_0$ 与 $b_1=b_0$. 如果 $c_0\in B$，令 $a_1=a_0$ 与 $b_1=c_0$. 如此继续，可构造一收缩序列使对每一个 $n\geqslant1$，$I_n=[a_n, b_n]$ 是 I_{n-1} 的一半，并且 $a_n\in A$，$b_n\in B$. 根据完全性定理，序列中的区间 I_n 有一公共点 c. 根据序列的构造，如果 $c\in A$，所有上述的 a 都小于 c，c 是 A 的最大的数；如果 $c\in B$，c 是 B 的最小的数. 见 44 页上的完全性定理的证明.

第 六 节

1. 如果 X 是有界的，则它被包含在一个足够大的球 B 中. 如果 $A\subset X$，则 A 被包含在 B 中，所以 X 的任何子集 A 也是有界的.

2. 如果 X, Y 是两个有界集，则对于某些 r 及 s，$X\subset N(x_0, r)$，$Y\subset N(y_0, s)$. 令 $t=d(x_0, y_0)$；则

$$N(x_0, r+s+t)\supset N(x_0, r)\cup N(y_0, s)\supset X\cup Y.$$

3. 例如，每一个整数是一个有界集；但是无穷序列 1, 2, 3, …, n, …是无界集.

4. $U_k=\left[a,\ b-\frac{b-a}{2^k}\right)$；或 $U_k=\left[a,\ b-\frac{b-a}{k}\right)$，等等.

5. 第一种情形，U_k 包含所有 $x\in X$ 使 $1/k<d(x_0,\ x)\leqslant 1$；即 U_k 是一平环包含其外圆但不包含其内圆.
第二种情形，U_k 包含所有 $x\in X$ 使 $d(x,\ y_0)>1/k$；即 U_k 是月牙形区域.

6. 这样区间的最少个数是 11；例如，令 $s=\frac{1}{100}$，并且集

$$U_1=(-s,\ 1-s),\ U_2=(1-2s,\ 2-2s),\ \cdots,$$
$$U_{11}=(10-11s,\ 11-11s).$$

这是 R 的所有长为 1 的区间的一个子集，并且因为这个子集覆盖 X，所有的这样的区间是 X 的一个覆盖.

7. 如果 y 是在 C_1 的外部，则从 x_0 到 y 的线段与 C_1 交于一点 c，使 U_c 包含 y. C_r 是闭的且有界，所以是紧致的. 见图 S4. 开平环不能被 C 的有限子族覆盖，因为，当 r 很接近于 1，覆盖 C_r 的半平面将无限增加.

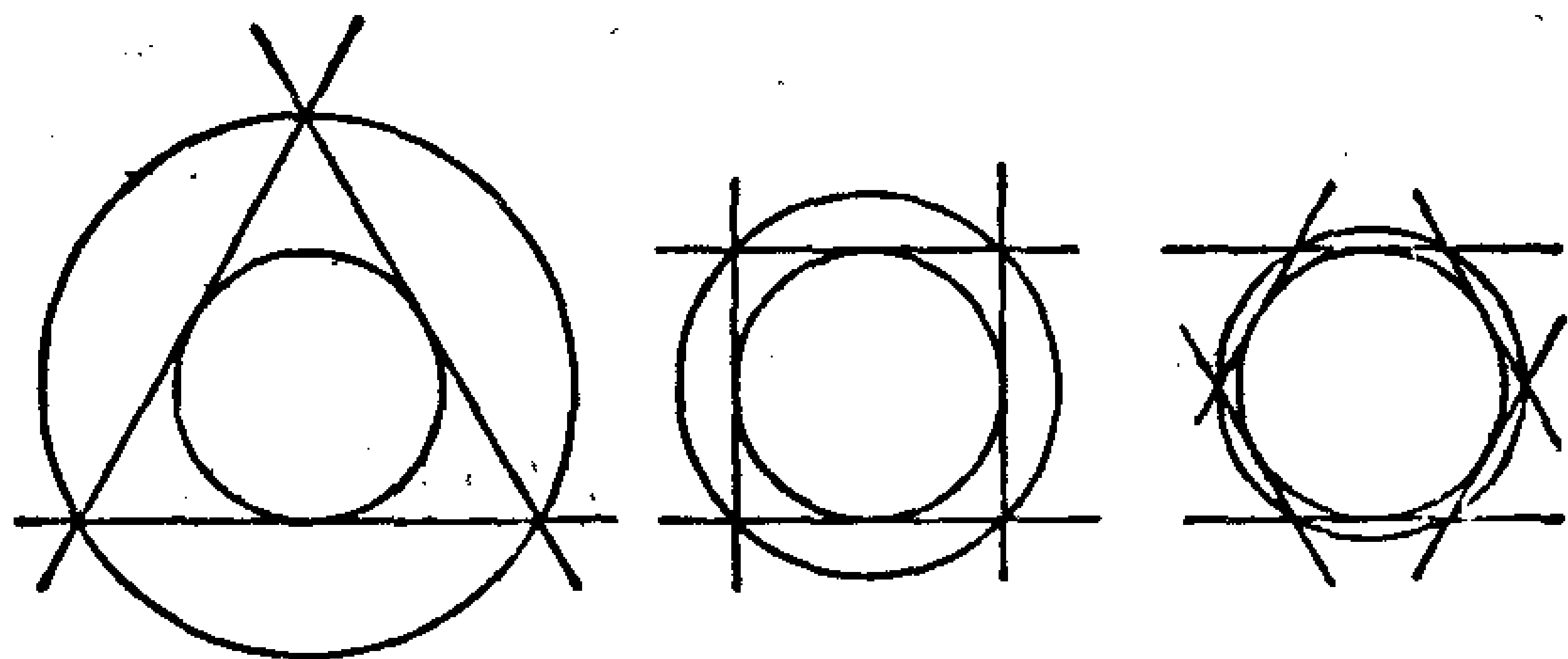


图 S4

8. X 的一个有限覆盖和 Y 的一个有限覆盖的并集是 $X\cup Y$ 的一个有限覆盖.

9. 取整数作为单个元素的集合；或考虑 R 作为闭区间 $[-n,\ n]$ 的并集，$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$.

10. 当 y 是 $Y-X$ 的一个点，而 r 是一个正数时，$N(y,\ r)$ 的外部是开

集．任意的 $y\in Y-X$ 与任意的 $r>0$ 的这族开集覆盖 X．取一有限覆盖．在这个覆盖中取最小的 r．则 $N(y, r)\cap X=\emptyset$．这就证明了 $Y-X$ 是开集，所以 X 是闭集．

11. 令 a 和 b 为无理数(例如，取 $a=-\sqrt{2}$ 和 $b=\sqrt{2}$)；则

$$X=[a, b]\cap Q$$

是 Q 中的闭集，因为$[a, b]$在 R 中是闭集，并且 X 既不包含一个最大值也不包含一个最小值．

12. $fx=nx$；f: $[-1, 1]\to[-n, n]$．不存在；因为 I 是紧致的，所以 fI 也是紧致的，但是 R 不是紧致的．函数 $fx=x/(1-x^2)$是从$(-1, 1)$到 R 的满映射；$fx=\tan\frac{1}{2}\pi x$ 也是．这样的函数有许多：在 $x=\pm1$ 处具有垂直渐近线的任意连续递增函数都满足要求．

13. 首先，设 X 是紧致的，并且 C 是由 R^m 的开集组成的、X 的一个覆盖．对于所有的 $V\in C$，交集 $V'=V\cap X$ 的族 C' 是由 X 的开集组成的、X 的一个覆盖．因为 X 是紧致的，C' 包含一个有限覆盖 D'．C 中的 V，那些对应于 D' 中的 V' 的，组成一个有限覆盖 $D\subset C$．其次，设 X 有这样的性质：对每一个由 R^m 的开集组成的 X 的覆盖包含一个有限覆盖，并且设 C 是由 X 的开集组成的 X 的一个覆盖．如果 $y\in R^n-X$，y 的邻域的外部组成一个由 R^n 的开集组成的 X 的覆盖；因为它包含一个有限覆盖，y 有一不与 X 相交的邻域；所以 X 是闭集．对于每一个 $V\in C$，令 $V'=V\cup(R^m-X)$．从所有 $V\in C$，而获得的 V' 给出[指 V']由 R^m 的开集组成的 X 的一个覆盖 C'．C' 中的一个有限覆盖对应于 C 中的一个．

第 七 节

1. (a) 第一个是连通的；第二个不是连通的，删去的两点把它分离成由这两点所决定的两个圆弧，当然这两点不包含在这分离中．

(b) 第一个是连通的；第二个分离成两个子弧．

(c) 第一个是不连通的，因为如果 A 是一个点的集合，B 是其他点的集合，A 与 B 是一个分离．其他两个集合都是连通的．

(d) (i) 连通的(一段橡皮管)；

(ii) 连通的(沿 Q 切开后[车轮的]内胎可铺开成平环);
(iii) 连通的(一段橡皮管沿纵向切开后可铺开成矩形);
(iv) 不连通的(内胎的一块从其余部分切下来了);
(v) 不连通(内胎切成两段);
(vi) 不连通(从管子切下一个环片);
(vii) 连通的(在立体上删去了 P 型的两个圆,就好象在表面上刻了两个痕迹;任意两点可以经过内部连接起来);

(e) 不连通; A 和 B 是这两个圆. $A\cap B=\emptyset$, 所以交集是连通的.

(f) (i) 连通的; (ii) 连通的; (iii) 不连通;
(iv) 连通的; (v) 连通的.

2. 如果 D 是关于点 p 的星形, 则每一个 $x\in D$ 在 D 中的线段 px 上, 并且这个线段是连通的. D 中的任意两点 x, y 在 D 中的折线 $xp\cup py$ 上, 折线也是连通的, 因为它是具有公共点的两个连通集合.

3. 在所有的情形中,在外部、内部或表面上的两个点能够用一个圆弧连起来.

4. 令定义域 X 由两点组成,而其值域 Y 只包含一个点.

5. 对于切线, 射影 f 缩短了距离,所以是连续的. 对于弦, 令 g 表示从圆心到平行于切线的一线段的满射影, 则 g 是相似变换, 所以复合的 fg 是连续的. 一个弦是一线段, 所以是连通的, 所以圆弧也是连通的,是一连通集合的连续的原象.

6. 一个圆的两半的交集由两个端点组成.

7. 具有有理坐标 x 的点集是平行于 y 轴的直线族; 具有有理坐标 y 的点集是平行于 x 轴的直线族. 这些的并集组成格栅. 格栅的任意两个点可以用至多三段的折线连结起来. 恰有一个有理坐标的全体点是分离的, 例如, 用直线 $y=x$ 分开这些点,一部分在直线之上, 一部分在直线之下. 两个坐标都是有理数的全体点是分离的,例如,用直线 $x=\sqrt{2}$.

8. 以(0, 0)为圆心,以无理数 r' 为半径的圆分离 X.

9. 令 X 表示这个集合,并且假设 $X\neq\emptyset$. 令 x_0 为 X 的一点. 把 $R-X$ 分成小于 x_0 的那些数的集合 A 和大于 x_0 的集合 B. 因为 X 包含

这点中的任意两点之间的所有点(见定理7.6的证明), 可见A的每个数$\leqslant X$的每个数, 并且X的每个数$\leqslant$于B中的每个数. 如果A和B是空集, 我们有$X=R$.
情形1, 设$A\neq\emptyset$和$B=\emptyset$. 应用第5节习题11可得到数a, 或是A中的最大数或是X中的最小数; 如果$a\in A$, 则X是数x的开的半直线使$a<x<\infty$, 如果$a\in X$, 则X是闭的半直线$a\leqslant x<\infty$. 情形2, 当$A=\emptyset$和$B\neq\emptyset$, 是类似的. 在情形3中, 当$A\neq\emptyset$和$B\neq\emptyset$, 我们应用第5节习题11到由A与$X\cup B$所组成的切割, 来得到数a, 它是A的最大数或X的最小数. 还应用这习题到由$A\cup X$与B这切割以得到数b, 它或是B中最小数或是X中最大数. 如果$a=b$, 则X是单独的点x. 如果$a<b$, 则X包含开区间(a, b)连同0个、1个或两个端点.

10. 因为区间是闭的, 它们的交集X也是闭的. 假设X包含多于一个点, 如果x和y是X的任意两个点, 区间$[x, y]$位于序列的每个区间中且因此也位于X中; 所以X是连通的. 因为X是闭的并且有界的, 它是紧致的; 并且因为X是紧致的并且连通的, 它是闭区间.

11. 令$I_0=[a_0, b_0]$, 其中$a_0\in A$, $b_0\in B$. 如果I_0的中点m在A中, 令$I_1=[m, b_0]$; 否则令$I_1=[a_0, m]$. 用这个方法造一收缩序列, 使对于每个n, $I_n=[a_n, b_n]$是I_{n-1}的一半, $a_n\in A$, $b_n\in B$. 令c是所有的I_n的公共点. c的每个邻域包含I_n, 对于足够大的n, 所以它包含A与B的点. 于是, 如果$c\in A$, 则A不是开集, 如果$c\in B$, 则B不是开集. 这与假设A, B是一个分离相矛盾, 因为$c\in I_n\subset I=A\cup B$.

第 八 节

1. (a) 见第6节习题12的解答.

(b) 限于(a)的解答中的同胚限制在$[0, 1)$上.

(c) 在平面Y中, 用以X的中心为坐标原点的极坐标(r, θ)定义$f:X\to Y$为$f(r, \theta)=(r/(b^2-r^2), \theta)$, 其中$b$是$X$的半径. 用话来说, f是(a)的那种映射, 把X的每一条直径拓扑地映成那包含该直径的直线.

2 用球极平面射影，挖去一点的一个圆拓扑等价于一条直线；由1(a)，这直线拓扑等价于一开区间. 另一方法，从一基点开始量弧长，就把挖去一点的圆拓扑地映成一开区间，其长度是圆周长.

3. 例如，全体整数的集合；所有正有理数的集合，所有正无理数的集合；集合$\left\{0, \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots\right\}$；等等.

4. (a) 是；(b) 不是；0的每个邻域中都有些点，它们与0不连通；(c) 是；(d) 不是.

5. (a) 例如，全体整数集；一直线；一闭的半直线.

   (b) 设X是R^m中的闭集，并且$x \in X$. 对于任意$r>0$，令B_r为以x为中心的、以r为半径的m维闭球体. $N(x, r) \subset B_r$. 因为B_r闭并且有界，它是紧致的. 因为X是闭的，$X \cap B_r$是紧致的，它包含$N(x, r, X)$.

6. (a) 不是拓扑的；一条直线是无界的，拓扑等价于一个有界的开区间.

   (b) 拓扑的.

   (c) 不是拓扑的；任何两个长度相同或不同的线段是拓扑等价的.

   (d) 拓扑的.

   (e) 不是拓扑的；例如，一方形拓扑等价于任意四边形，凸的或凹的.

   (f) 拓扑的.

   (g) 拓扑的.

7. X, Y是拓扑等价，所以有一连续一对一的函数f使$fX=Y$. 令C为Y的一个开覆盖；对于每一个$U \in C$，令$U'=f^{-1}U$，并且令C'为集合U'的族. 因为f连续，每一U'是开集. 因为C覆盖fX，C'覆盖X. 因为X是紧致的并且C'是X的一个由开集组成的覆盖，C'包含有限覆盖，设为$U'_1, U'_2, \cdots, U'_k$. 则C中对应的集合$U_1, U_2, \cdots, U_k$覆盖Y，因为$Y=fX$且每一个$U_i=fU'_i$. 于是Y是紧致的.

8. (a), (d), (e), (g).

第 九 节

1. $1/\sqrt{2}$.
2. (a) 图形是倒置的抛物线，通过(0, 0)和(1, 0)；其最高点在(1/2, 1)处.
   (b) 不是，例如 $f0=f1=0$.
   (c) $f0=0$ 和 $f(3/4)=3/4$.
3. (a) 图形是通过(0, 1)和(1, 1)的抛物线；其最低点在(1/2, 3/4).
   (b) 不是，例如 $f0=f1=1$, $f^{-1}0$ 还是空集.
   (c) $f1=1$.
4. 我们证明：如果一集合 Y 拓扑等价于 X, Y 必有同样的性质. 设 $h:X\to Y$ 是一个同胚，并且 $f:Y\to Y$ 是连续的. 则 $h^{-1}fh:X\to X$ 是连续的. 令 $x\in X$ 为 $h^{-1}fh$ 的一个不动点，即 $h^{-1}fhx=x$. 这蕴含 $fhx=hx$, 所以 $hx\in Y$ 是 f 的一个不动点.
5. x^2, x^3, $\sqrt{x}$ 或 x^m 对于任意不等于 1 的正数 m.
6. 习题 5 中的每一种.
7. 设 f 是[0, 1)的满的自映射. 因为满，有一个 $b\in[0, 1)$, 使 $fb=0$. 如果 $b=0$, 则 0 已是不动点；所以设 $b>0$ [与 0 不是不动点' 并且考虑区间[0, b]]. 则 $fx-x$ 在 $x=0$ 处是正数，但在 $x=b$ 处是负数. 根据主要定理，$fx-x=0$, 对于某个 $x\in[0, b]$.

第 十 节

1. (a) 通过 p 作圆 C 的切线，把 L 划分为三个子集；即切线与 L 的两个交点 a 与 b, 在 a 与 b 之间的点，以及线段 ab 外的点. L 的在 a 与 b 之间的每一个点有两个原象；a 与 b 各有一个原象；L 的线段 ab 外的每一个点没有原象.
   (b) 与 p 共线的、C 的一对对径点.
2. L 的每个点恰有一个原象. 这个射影不把 p' 映射到 L; 并且射影不是连续的，因为 C 是紧致的而 L 不是.
3. 令 $f:D\to D'$ 为任意映射，并且 $g:D'\to D$ 为反射、则 f 与 g 的复合映射 $gf:D\to D$ 有一个不动点 x, 并且 $gfx=x$ 就是说 fx 是 x 的

反射像.

4. 作 f 与对极映射 $g:D'\to D$ 的复合映射. 则 $gf:D\to D$ 有一个不动点 x, 并且 $gfx=x$ 就是说 fx 是 x 的对极点.

5. 令 $f:C\to C$ 是把 C 绕 C 自身两次的映射; 从一参考点开始量弧长, 把弧长增加两倍(例如用 $\{r, \theta\}$ 表示以 C 的中心为极点的平面极坐标, 令 $f\{r, \theta\}=\{r, 2\theta\}$.)则 f 把每一对对径点映成一个点. 现在再作 f 与任意一个非恒同映射 $g:C\to L$, 例如一个射影, 的复合映射.

第十一节

1. 沿着通过两个图形中心的连线, 切一刀可以解决这个问题. 如果任意两个煎饼都具有关于一点或中心的对称性质, 这方法同样能行得通.

2. 仅仅当这两个多边形的边数都是偶数时能行得通; 如果一个多边形的边数是奇数, 这方法仅当一个顶点在中心线上时才行得通.

3. 有无穷多种切法: 通过中心的任意一对垂直的直线.

4. 任一个解的 $\pi/2$ 的旋转仍是同一个解.

5. 以圆形薄饼的圆心为中心, 选一足够大的圆 C, 把这两个薄煎饼都包含在内. 令 r 为 C 的半径. 对每一 $x\in C$, 令 P_x 代表不规则薄煎饼在 xz(方向自 x 到 z)左侧的那部分面积, 令 Q_x 代表 xz 右侧部分的面积. 定义 fx 为差 P_x-Q_x. 在 x 的对径点 x' 处, 左右侧颠倒了; 所以 $fx'=-fx$. 因为 f 连续并且当点描过半圆时改变正负号, f 必在某处为零.

6. 用半圆形的刀, $x'_A=x_A$ 将不成立(半圆绕其中点旋转 180° 不能变换成它自身). 对于旋转 180° 而不变的那种形状的刀, 例如, S 形状的刀, 论点成立.

第十二节

1. 首先观察对于任何 x 和 x', 我们有

$$|x^2-x'^2|=|x+x'||x-x'|\leqslant(|x|+|x'|)|x-x'|.$$

如果 x 与 $\epsilon>0$ 已知, 取 δ 为 1 与 $\epsilon/(2|x|+1)$ 这两个数中的较小

者．如果 x' 是使 $|x'-x|<\delta$，则 $\delta\leqslant 1$ 蕴含 $|x'|<|x|+1$，因而 $|x|+|x'|<2|x|+1$；且 $\delta\leqslant\epsilon/(2|x|+1)$蕴含

$$|x^2-x'^2|\leqslant(|x|+|x'|)\ |x-x'|<(2|x|+1)|x-x'|\leqslant\epsilon.$$

2．令 x 与 $\epsilon>0$ 已给出．因为 g 在 x 处连续，存在 $\delta_g>0$，使对所有 $x'\in N(x,\ \delta_g)$，

$$|gx-gx'|<\frac{\epsilon}{2(|fx|+1)} \quad 与 \quad |gx-gx'|<1.$$

这蕴涵

$$|fx||gx-gx'|<\epsilon/2 \quad 与 \quad |gx'|<|gx|+1.$$

因为 f 在 x 处连续，存在 $\delta_f>0$，使对所有 $x'\in N(x,\ \delta_f)$，

$$|fx-fx'|<\frac{\epsilon}{2(|gx|+1)}.$$

那么 $\quad |gx'||fx-fx'|<(|gx|+1)|fx-fx'|<\epsilon/2.$

现在取 δ 为 δ_g 与 δ_f 中较小者．则对所有 $x'\in N(x,\ \delta)$

$$|fx||gx-gx'|+|gx'||fx-fx'|<\epsilon/2+\epsilon/2=\epsilon.$$

3．常数项．

4．根据这个准则，$b>6$．多项式因式分解为

$$fx=x(x-3)(x+1),$$

所以 $fx>0$ 对于 $x>3$，$fx<0$ 对于 $x<-1$．

5．$b=25$．

第十三节

1．(a) 一水平窄条，其宽等于 Q 的直径．

(b) 一水平直线．

(c) 水平窄条中的一条垂直线段．

(d) 斜线变换成 Q 上的螺旋线，并且投影成一波形曲线，在窄条中上下振动．

(e) 如果点 p 不在窄条上，则 $f^{-1}p=\emptyset$．如果 p 在窄条的边上，$f^{-1}p$ 是沿一条垂线上的均匀相隔的点的一个序列；相邻两点之间的距离为 $2\pi r$，其中 r 是圆柱的半径．如果 p 在窄条内，$f^{-1}p$ 又是一条垂线上的点的一个序列，并且相间的一对点之间的距离是 $2\pi r$．

2. (a) 象 fP 是 P 中的以原点为中心，以 S 的半径为半径的圆片.

(b) 在球极平面射影下，直线 L 的象是圆 C，它是通过 p 及 L 的平面与 S 的交线而挖去 p 点. 如果 C 处于 p 的半球上，则 $C-p$ 的象是通过原点的椭圆而挖去原点. 如果 C 同时在两个半球上，则 $C-p$ 的象是连接 fP 的边上两点的一对椭圆弧，并且其中之一通过原点.

(c) 原象 $f^{-1}q$ 是 q 自身，当 q 是原点或 q 是在 fP 的边上. 对于 fP 的另一些点，$f^{-1}q$ 是一对点.

3. (a) 通过 z 的一条直线.

(b) 以 r 为半径的一个圆.

(c) 一螺旋线，其到 z 的距离以常速率增加.

(d) 见图 S5.

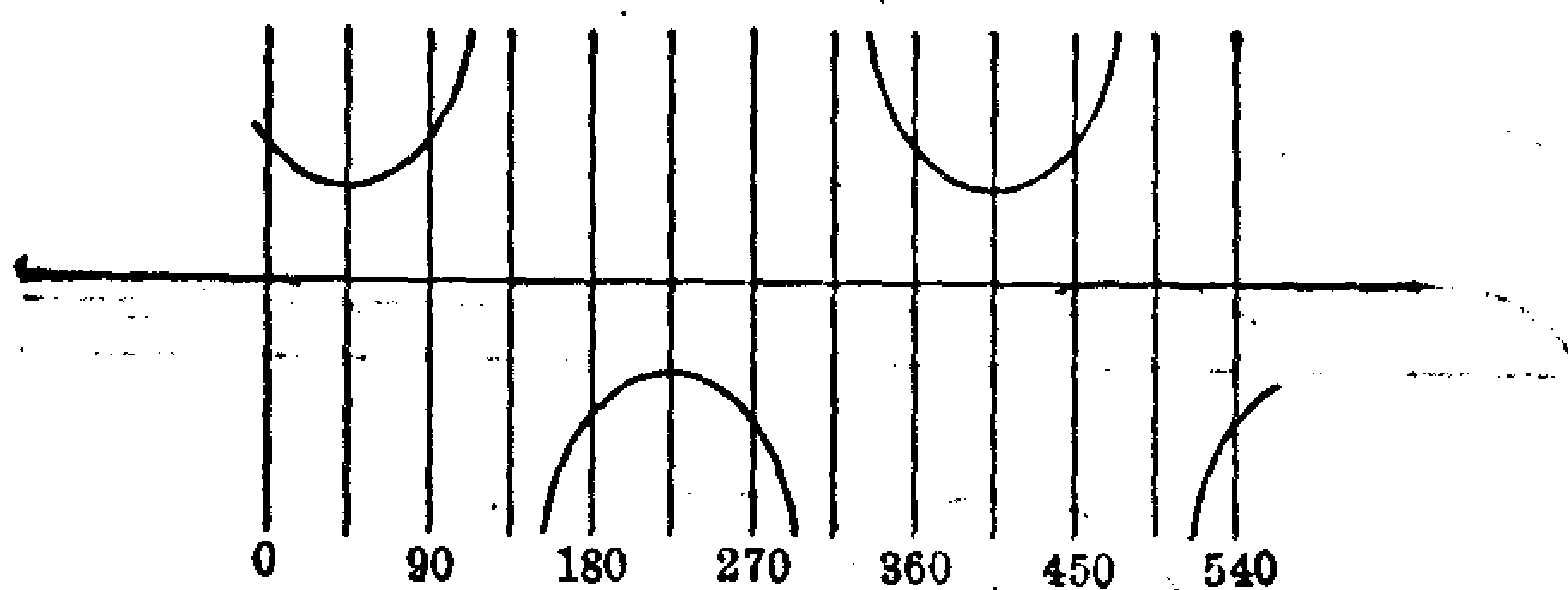


图 S5

第十四节

1. 如果 D 是圆片并且 C 是它的边界圆，令 S 是 C 的半圆. 定义 $f|S$ 是恒等映射，并且在 $D-S$ 上，令 f 是把每个垂直于 S 的直径的线段映射到其自身，而其长度向其在 S 上的端点缩短一半. 然后 f 是从圆片到半圆区域 T 上的一对一的满映射. 拓扑等价于圆片的任意其他图形 A，有一对一的映射 $g:A\leftrightarrow D$；它与 f 的复合映射给出一对一的连续函数 $fg:A\leftrightarrow T$.

2. 把每一条半径 zx 刚体地映射成 zgx.

3. 这公共弧拓扑等价于一线段，所以，拓扑等价于一个圆片的直径.

自习题1可知，这个等价可以扩展为 A 与这圆片的一个半圆区域同胚，也可以扩展为 B 与另一个半圆区域同胚. 所以 $A\cup B$ 与一个圆片同胚.

4. b 和 c.

5. (a) 不.

   (b) 在图 14.3 中三处剪切的任何两个都会得到一个与圆片的同胚象.

   (c) 三个剪切.

第 十 五 节

1. 沿着直径折迭 D 使 fD 形成一半圆区域(或半个圆片); 那么任何 y 和 fz 可以用避开 fC 的折线道路连结起来.

第 十 六 节

1. 见图 S6.

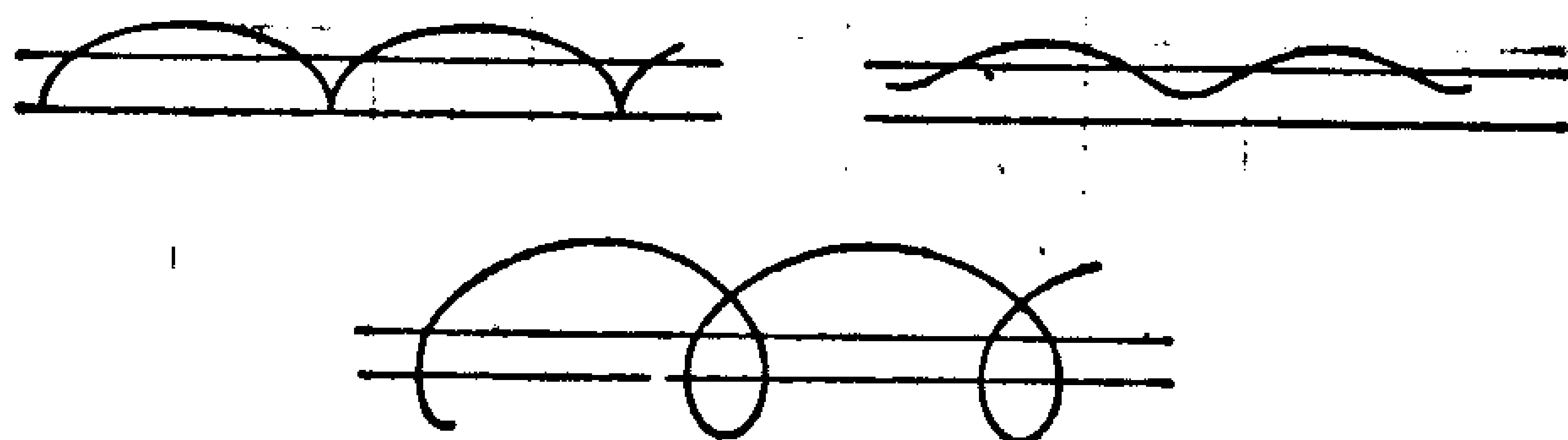


图 S6

2. 根据定理 4.6, 复合映射 gf 是连续的. 它的定义域是$[a, b]$, 值域是 P. 所以 gf 是 P 内的一条曲线.

3. 相似变换: $ft=a+t(b-a)$.

   非相似变换: $ft=a+t^n(b-a)$, $n\neq1$.

第 十 七 节

1. 90°; −90°.

2. $A1$; $B2$; $C1$; $D0$; $E2$; $F0$; $G1$.

3. $A1$; $B2$; $C1$; $D1$; $E2$; $F3$; $G2$; $H1$; $I1$; $J0$.

第十八节

1. 对于那些 $W\neq 0$ 的，A, B, C, E 与 G.
2. 除去 J 外，所有的区域.
3. (a) fC: 一半圆.

   fD: 半圆与直径所包围的区域中所有的点.

   (b) $W=0$. 这说明 $W\neq 0$ 是 $y=fx$ 的解存在的一个充分条件，它不是必要条件；也就是说，甚至于在 $W=0$ 时，解可以存在.

第二十节

1. u, w, x, y, z.
2. u, 350; w, -10; x, 90; y, 180; z, 330.

第二十一节

1. 图 22.5 给出一个解；有许多其他的解. 例如，整个曲线组成的这平凡划分对于 F 中的每一个点而言，是足够细的.
2. (a) 从 a 到 d 的一段.

   (b) 是，从 f 到 a 的一段.

   (c) 点 f 与 d 把曲线划分为两段，它们之中的每一个都是在 y 处的短曲线.

第二十二节

1. 零.
2. (a) 从 a 到 d: $20-270+(2-0)360=+470$.

   从 b 到 g: $350-90+(2-2)360=+260$.

   (b) 2.

   (c) 例如，与图中所示射线反向的射线，或只与 φ 交两次的任何以 y 为起点的射线.

第二十三节

1. $A(\varphi_1, y)=+470$; $A(\varphi_2, y)=-30$; $A(\varphi|[t_0, t_2], y)=+440$.

第二十四节

1. P 中的任意闭曲线 φ 与 P 中在点 y 处的任意常曲线是线性同伦的：从 φ 上每一点 φt 画一 φt 到 y 的线段；这是 φt 所走的道路.
2. 对于 $t\in[a, b]$ 和 $\tau\in[0, 1]$，令 $\Phi(t, \tau)=\varphi(\tau a+(1-\tau)t)$. 则 $\Phi(t, 0)=\varphi t$ 和 $\Phi(t, 1)=\varphi a$. φt 在同伦下所走的道路是限制 $\varphi|[a, t]$，但取反向.
3. 如果 Q 是一对变数 (t, τ) 的矩形使 $t\in[a, c]$ 和 $\tau\in[0, 1]$，则用铅垂线 $t=b$ 把 Q 分成两个矩形 Q' 与 Q''，从而 Q 是矩形 Q'，Q'' 的并集. 令 $\Phi':Q'\to P$ 与 $\Phi'':Q''\to P$ 分别是从 $\varphi|[a, b]$ 与 $\varphi|[b, c]$ 到点 φb 这常映射的同伦，使 $\Phi'(b, \tau)=\varphi b=\Phi''(b, \tau)$ 对于所有的 $\tau\in[0, 1]$. 则 Φ' 与 Φ'' 合并而规定一映射 $\Phi:Q\to P$，其中 $\Phi|Q'=\Phi'$ 与 $\Phi|Q''=\Phi''$.
4. 命 $\Phi'(t, \tau)=\Phi(t, 1-\tau)$.

第二十五节

1. 从圆 φ_0 的中心到圆 φ_1 的中心的向量是从 φ_0 到 φ_1 的一个不与 y 相交的同伦.
2. 线性同伦与 y 不相交；它与 x 相交.
3. 在这同伦情形下，φ_0 与 φ_1 的方向不相对应. 如果把一个方向倒转过来，例如 φ_1 的方向，它们将相对应.

第二十六节

1. 把 $[0, 1]$ 分成四个子区间 $\left[0, \frac{1}{4}\right]\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$ 等等. 把这四个区间用相似变换映成矩形片 D' 的边界 C' 的相应的边，就有映射 $\varphi_0':[0, 1]\to C'$. Φ' 是从 φ_0' 到 D' 的中心这常闭曲线的线性同伦. 不需要其他修改.

第二十七节

1. 定理：令 $f:F\to P$ 是把一矩形区域 F 映到一个平面，使 f 保持 F 的周界 E 的每一点不动；则象 fF 包含所有的 F.

推论：不存在一个连续映射，把矩形区域映到其周界，保持周界的每一点不动。

定理的证明．根据提示，令 $h:P\to P$，使

$$hD=F.$$

则 fh 把 D 映到 P，$h^{-1}fh$ 把 D 映到 P．根据 h 的性质，如果 y 是 D 的边界 C 的一点，则 $hy\in E$ 与 $fhy=hy$． 所以

$$h^{-1}fhy=y,$$

$h^{-1}fh$ 是把一圆片映到一平面，使其边界圆的每一个点不动．根据本节中的定理，$h^{-1}fh\,D$ 包含 D 的所有点；也就是说，

$$h^{-1}fh\,D\supset D,$$

所以 $$fh\,D\supset hD.$$

因为 $$hD=F,$$

这最后一句话就说

$$fF\supset F.$$

2．令 $f:D-y\to C-y$ 为从点 y 出发的满投影，即对于 $x\in D-y$，fx 为通过 x 与 y 的直线及 $C-y$ 的交点。

3．从 y_0 到 C 的径向射影．

4．(a) 例如，到直径的垂直射影。

(b) 到固定点的常映射．

5．不存在从线段 s 到其两端点的，保持两端点都不动的连续映射．因为 s 是连通的，任意 s 的连续象是连通的，但是两个点的集合不是连通的。

第二十八节

1．(a) 中心。

(b) 该直径。

(c) 中心．

(d) 中心连线上的一个点，它与 D 的中心之间的距离为半径的 2/3.

(e) 复合映射 f 把水平直径 L 映到它自身．在 L 上取 o 为坐标系的原点，用 x 表示点的坐标． 我们得到

$$fx=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}r.$$

不动点出现在点

$$x=\frac{2}{9}r$$

处.

(f) 水平直径映到其自身的映射还是

$$fx=\frac{1}{2}|x|-\frac{1}{3}r.$$

不动点在 $x=-\frac{2}{9}r$ 处.

2. 见第九节习题 4 的解答.

第三十节

1. (a) f 是本节讨论的常映射；场中的所有向量是互相平行而且等长及同向.

(b) 因为 $fx=x$，从 x 出发与(o, fx)平行且等长同向的向量，终止于这样的点 y，从 o 到 y 的距离两倍于 $d(o, x)$；(o, y) 沿 (o, x) 并且是它的长度的两倍.

(c) 对于每一个 x，vx 始于 x 终止于原点.

(d) 令变换用向量 (o, c) 来描写，而且令 z 是一个点，使 o 为从 z 到 c 这线段的中点. 则变换把点 z 变为 o. 向量场在这个点处的向量是零向量. 场中所有其他向量按下面的方式从点 z"辐射"而得到. 对于平面中的每一点 x，vx 是从 x 发出的在直线 zx 上远离 z 的向量，其长度等于从 z 到 x 的距离.

(e) 设直线 L 为定义反射 f 的直线. 令 x' 为任意点 x 在 L 上的垂直射影. 则 vx 是从 x 到 L 上的点 x'' 的向量，这里 ox'' 两倍于 ox'，且在 ox' 同侧.

第三十一节

1. 不；vx 在 z 处没有定义，并且无法在该处定义使得具有连续性.

2.

	指数	$vx=0$	切　线	外　法　线	内　法　线
(a)	零	无	垂直于 oz 的直径的两个端点处	C 与 oz 的延长线的交点处	C 与 oz 的交点处
(b)	1	z	无	C 上的所有点	无
(c)	1	o	无	通过 o 与 z 的直径的端点	无
(d)	零	无	在从 o 出发的外切线的切点处	在 C 与 oz 的延长线的交点处	在 C 与 oz 的交点处
(e)	零	无	在从 o 出发的外切线切点的对径点处	在 C 与 oz 的延长线的交点处	在 C 与 oz 的交点处
(f)	零	无	在两个点处，它们的平移像 fx 是从 o 出发到 fC 的切线上的切点	在对应于 fC 与 ofz 延长线的交点处	在对应于 fC 与 ofz 的交点处
(g)	-1	z	在与选定的直径成 $45°$ 的四个半径的端点处	在选定的直径的两个端点处	在与选定的直径垂直的直径的两端点处

第三十二节

1. (a) 令 P' 是通过 z 垂直于 L 的平面，它与 S 相交于 C；则 C 上所有的点映成 P' 与 L 的交点 z，而且 C 的所有的各对对径点都具有同一象点。

   (b) 这对 $(0, r, 0)$，$(0, -r, 0)$。

2. 选定一球 $\bar{S}$，其球心在 Q 点，而且令 h 是从 Q 出发的从 $\bar{S}$ 到 S 的径向射影。则 h 是一个同胚，它把 $\bar{S}$ 上的通常的对径点 u, u' 映成 S 上奇特的对径点 hu, hu'。从给出的 $f:S\to P$，我们得到复合映射 $fh:\bar{S}\to P$。具有同一象点的 $\bar{S}$ 上的一对对径点 u, u' 给出具有

同一象点的 S 上的一对奇特的对径点 hu, hu'.

3. 用与上题类似的方法，例如，用径向射影，两种表面的任何一种与球是同胚的；从而可得问题的结论。

第三十三节

1. 通过三个立体的中心的平面。
2. 所有通过 B 的轴的平面形成一平面族，其中每一个可把 A 与 B 二者对半划分。取一个足够大的球，使它包含这三个立体，以 B 的轴 L 为直径，以 z 为中心。垂直于 L[并且通过 z 的]的平面上的大圆 E 的每一点 x，确定族中的垂直于 zx 的平面 P_x. P_x 的包含 x 的一侧称为 P_x 的正侧。令 V_x 为 C 的在 P_x 的正侧的那部分体积，W_x 为 C 的在 P_x 的负侧的那部分体积。定义 fx 为差 V_x-W_x. 则对于对径点 x, x'，我们有 $fx'=-fx$. 因为 f 是连续的，在 E 的半圆的某处它必为零。

第三十四节

1. 考虑球的点 x 处的切平面与每一个向量 vx 的在这切平面上的垂直射影 ux; u 是一个连续的切向量场，所以根据定理在某点处为零；因为每个 vx 是非零向量，具有切向分量为零的向量是法向的。
2. 径向射影把椭球及其切向量场满映射成一个球及一与球相切的向量场。这映射是连续的，而且零向量仍映射为零向量。

第三十五节

1. (a) 向左平移 4 个单位。
   (b) 向上平移 2 个单位。
   (c) 向东南平移 $\sqrt{2}$ 个单位。
   (d) 径向放大 2 倍，一相似变换。
   (e) 绕原点旋转 180°.
   (f) 绕原点旋转 90°.
   (g) 绕原点旋转 45°，然后放大 $\sqrt{2}$ 倍。
   (h) 和前面一样，然后向下平移 3 个单位。

(i) 象本节中所描写的 z^2，然后绕原点旋转 90°，最后向东北平移 $2\sqrt{2}$ 个单位.

(j) 对单位圆的反演，随之以对 x 轴的反射.

第三十六节

1. 如果 $z\in E$，命 $r=|z|$. 因为 $r>r_0$，这证明适用于半径为 r 的圆 C，并且说明 $g(z, \tau)$ 不是零，对于 $z\in E$ 和 $\tau\in[0, 1]$. 所以 g，从而 f，在 E 中没有零.

2. (a) $(4\cdot3)^1$, $0^{1/2}$, $(4\cdot2)^{1/3}$, $(4\cdot5)^{1/4}$ 中最大的是 $r_0=12$.

   (b) $g(z)=\frac{1}{2}f(z)=z^7+\frac{1}{2}iz^3-\frac{3}{2}z$. $(7/2)^{1/4}$ 与 $(21/2)^{1/6}$ 中最大的是 $r_0=(21/2)^{1/6}$.

   (c) $r_0=4\sqrt{5}$.

3. $fz=4(z^3-(1+i)z^2-(2-i)z+2i)$. $3\sqrt{2}$, $(3\sqrt{5})^{1/2}$, $(3\cdot2)^{1/2}$ 中最大的是 $r_0=(3\sqrt{5})^{1/2}$，近似于 6.7. 根 2, -1, i 的绝对值是 2, 1 和 1.

4. (a) 零是在点 $-2/3$ 与 5 处，而且 $r_0=26/3$.

   (b) 零是在点 $(1\pm i\sqrt{2})/3$ 处，其绝对值为 $\sqrt{3}/3$，而且 $r_0=4/3$.

5. 取关于 $h(z)$ 的公式的绝对值，用下面的事实：和的绝对值至多是绝对值的和；这给出

$$|h(z)|\leqslant\frac{|a_1|}{r}+\frac{|a_2|}{r^2}+\cdots+\frac{|a_n|}{r^n}.$$

因为右边是 ≤ 1，我们有 $|h(z)|<1$. 现在继续定理 36.1 的证明的最后五句.

6. 在例子中取 $r=2$，我们求得

$$\frac{0}{2}+\frac{|-1|}{4}+\frac{5}{8}=\frac{7}{8}<1.$$

所以半径为 2 的圆片包含多项式的所有零值.（与[定理 36.1 的证明中的]近似于 2.5 的 $r_0=15^{1/3}$ 相比较.）

索引

六 画

七 画

八 画

九 画

十 画

十一画

十二画

十三画

十四画以上